You have downloaded a document from
RE-BUŚ
repository of the University of Silesia in Katowice

Title: Operatory zachowujące, w sposób przybliżony i dokładny, ortogonalność i relacje pokrewne

Author: Paweł Wójcik

Citation style: Wójcik Paweł. (2013). Operatory zachowujące, w sposób przybliżony i dokładny, ortogonalność i relacje pokrewne. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.

UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
Biblioteka Uniwersytetu Śląskiego
Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

UNIWERSYTET ŚLĄSKI

Instytut Matematyki

PRACA DOKTORSKA

Paweł Wójcik

Operatory zachowujące, w sposób przybliżony i dokładny, ortogonalność i relacje pokrewne

Promotor
dr hab. Jacek Chmieliński

Katowice 2013

UNIWERSYTET ŚLĄSKI
BIBLIOTEKA
Dr BG 3408

Spis treści

Wstęp

W celu ułatwienia lektury niniejszej pracy, przedstawimy poniżej jej zarys. Dla zapewnienia wygody w redagowaniu twierdzeń i ich dowodów, w pracy przyjęto, aby terminem *operator* nazywać odwzorowanie liniowe. Pierwszy rozdział zawiera znane fakty z teorii operatorów (podrozdział 1.1), które będą użyteczne w dalszych rozdziałach. Ponadto w podrozdziałach 1.2, 1.3, 1.4 autor zamieścił swoje wyniki własne dotyczące teorii operatorów, które nie dotyczą bezpośrednio głównego tematu rozprawy, jednakże stanowią ważne narzędzie, stosowane niejednokrotnie w rozdziale drugim. W podrozdziale 1.5 autor przedstawia przy okazji „nowy" dowód, znanego twierdzenia o rozkładzie polarnym operatora określonego na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej.

Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi, $h, f\colon X \to Y$ operatorami oraz niech $\varepsilon \in [0, 1)$ będzie ustalone. Prace [11], [12], [47] dotyczą operatorów zachowujących ortogonalność lub prawie zachowujących ortogonalność, tzn. spełniających odpowiednio warunki

$$\forall_{x,y\in X} \quad x\perp y \;\Rightarrow\; hx\perp hy \tag{0.1}$$

lub

$$\forall_{x,y\in X} \quad x\perp y \;\Rightarrow\; fx\perp^{\varepsilon} fy, \tag{0.2}$$

gdzie $\perp^{\varepsilon}$ oznacza przybliżoną (prawie) ortogonalność. We wspomnianych pracach wykazano opis powyższych operatorów. W kontekście tej klasy operatorów narzucają się następujące pytania. Czy operatory spełniające (0.2) można aproksymować (przybliżać) takimi, które spełniają (0.1)? Ile wynosi wtedy najmniejsza odległość $\|f - h\|$ lub jak ją oszacować? Czy ta odległość między operatorami zależy od ε w taki sposób, że im mniejsze ε tym mniejsza odległość operatora h od operatora f? W ten sposób pojawił się problem stabilności, który w pracach [12] oraz [47] został rozwiązany.

Celem tej rozprawy jest zaprezentowanie nowych, niekiedy ogólniejszych wyników dotyczących zachowywania ortogonalności (lub podobnych relacji) przez operatory w przestrzeniach unitarnych bądź unormowanych. Autor rozprawy starał się uogólnić wspomniane wyniki dwoma sposobami. W pierwszym z nich ortogonalność oraz przybliżoną ortogonalność wektorów zastąpiono dowolnym (ale ustalonym) kątem pomiędzy wektorami oraz odpowiednio przybliżonym kątem. Zatem chodzi wtedy o operatory zachowujące (lub prawie zachowujące) dany kąt. Podobnie jak wcześniej, tak i teraz, pojawia się problem stabilności. Uzyskane uogólnienia pozwoliły na otrzymanie dodatkowych rezultatów takich jak na przykład istotne wzmocnienie wyników z pracy [30]. Ponadto, ulepszono znacznie pewien rezultat z pracy [47] w przypadku zespolonym. Wszystko, o czym teraz wspomnieliśmy, znajduje się w podrozdziałach 2.1, 2.2, 2.3 oraz 2.4 rozdziału 2. Natomiast w podrozdziale 2.5 prowadzone są rozważania na temat struktury zbioru wszystkich operatorów prawie zachowujących ortogonalność. W szczególności wykazano tam, że zbiór wszystkich operatorów prawie zachowujących ortogonalność jest otwarty w przestrzeni $B(X;Y)$.

Drugi sposób uogólnienia operatorów spełniających (0.2) lub (0.1) polega na rozważaniu przestrzeni unormowanych (w dziedzinie i przeciwdziedzinie operatorów) zamiast przestrzeni unitarnych jak dotychczas. Z kolei te uogólnienia zostały rozmieszczone w rozdziałach 4 oraz 5, które są rozwinięciem bądź kontynuacją tematów z [17] oraz [48]. Ponadto, rozdziały 4 i 5 są również uzupełniem do prac [16] i [38]. Oczywiście aby uogólnienia te miały sens, należy wcześniej zdefiniować „nowe" relacje w przestrzeni unormowanej, które byłyby odpowiednikami obu relacji $\perp, \perp^{\varepsilon}$. Należy przy tym zadbać o to, żeby ta „nowa definicja ortogonalności", zastosowana w przestrzeni unitarnej, zbiegała się ze standardową ortogonalnością. Rozdział 3 jest właśnie ukierunkowany na różne sposoby definiowania ortogonalności w przestrzeniach unormowanych. Ponieważ ortogonalność można definiować na wiele sposobów w przestrzeni unormowanej, autor duży nacisk położył na relacje $\rho_{\pm}$-ortogonoalności oraz ρ-ortogonalności, jak również na operatory zachowujące te relacje. Przedstawiony w tamtym rozdziale materiał, w szczególności w podrozdziałach 3.2, 3.3, stanowi kontynuację tematyki badanej w pracach [17] oraz [19]. W podrozdziale 3.3 podano warunki równoważne gładkości oraz semi-gładkości normy.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że zagadnienia stabilnościowe operatorów, omawianych w dwóch ostatnich rozdziałach, są silnie powiązane ze stabilnością liniowych izometrii. Ta ostatnia tematyka była intensywnie badana już od lat 60-tych XX wieku, na przykład w pracach [5], [6], [7], [20], [27], [35], [42].

Twierdzenia, lematy i wnioski będące efektem badań prowadzonych przez autora, są podane zawsze z dowodem. Natomiast przy twierdzeniach innych autorów zawsze jest podany odsyłacz do prac, w których można je odnaleźć.

Spis oznaczeń przyjętych w pracy

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
$A^{\perp}$, $a^{\perp}$ - dopełnienia ortogonalne (w przestrzeni unitarnej X) zbiorów $A, \{a\} \subset X$,
$K(x;r)$ - kula o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$,
$\overline{K}(x;r)$ - kula domknięta o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$,
$S(x;r)$ - sfera o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$.

Jeśli X jest przestrzenią unormowaną, to
$K(X)$ oznacza kulę jednostkową,
$\overline{K}(X)$ oznacza kulę jednostkową domkniętą,
$S(X)$ oznacza sferę jednostkową.

Jeśli Y jest drugą przestrzenią unormowaną, a V przestrzenią Banacha, to
$L(X;Y)$ oznacza zbiór odwzorowań liniowych (operatorów) $f: X \to Y$,
$B(X;Y)$ oznacza zbiór odwzorowań liniowych i ciągłych (operatorów ciągłych) $f: X \to Y$,
$L(X)$ oznacza zbiór $L(X;X)$,
$B(X)$ oznacza zbiór $B(X;X)$,
X^* oznacza zbiór funkcjonałów liniowych i ciągłych, tzn.: $B(X;\mathbb{K})$,
$U(B(V))$ oznacza zbiór odwracalnych operatorów z przestrzeni $B(V)$,
I oznacza odwzorowanie $I: X \to X$ określone wzorem $I(x) := x$ dla wszystkich $x \in X$,
l_n^1 oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_n|$,
l_n^∞ oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Rozdział 1

Własności ciągłych operatorów liniowych

Pierwszy rozdział ma charakter przygotowawczy, w którym gromadzimy niektóre ważne własności operatorów liniowych. W kolejnych podrozdziałach tego rozdziału uzyskamy twierdzenia, które będą pomocne w dowodach głównych wyników tej pracy.

1.1 Podstawowe własności

Niech U, W będą przestrzeniami unormowanymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Norma operatora $f\colon U \to W$ jest zdefiniowana zwykle wzorem

$$\|f\| := \sup\{\|fx\| : \ \|x\| = 1\} = \inf\{M \geqslant 0 : \ \forall_{x\in U}\ \|fx\| \leqslant M\|x\|\}.$$

Podobnie możemy zdefiniować

$$[f] := \inf\{\|fx\| : \ \|x\| = 1\} = \sup\{m \geqslant 0 : \ \forall_{x\in U}\ m\|x\| \leqslant \|fx\|\}.$$

Operator będziemy nazywali *ograniczonym z góry*, jeśli $\|f\| < +\infty$. Natomiast jeżeli $0 < [f]$, to operator f nazwiemy *ograniczonym z dołu* (oczywiście zawsze jest $[f] < +\infty$). Operator f jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $\|f\| < +\infty$. Można wykazać, że jeśli $0 < [f]$, to $\ker f = \{0\}$, a więc f jest wtedy różnowartościowy. Łatwo widać, że

$$\|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\| \quad \text{oraz} \quad [f]\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in U.$$

Ponadto, nie jest trudne do wykazania, że jeśli istnieje jakaś liczba $m > 0$ spełniająca dla każdego $x \in X$ nierówność $m\|x\| \leqslant \|fx\|$, to $[f]$ jest największą liczbą spełniającą ten warunek (czyli supremum jest osiągane).

Lemat 1.1 *Niech U, V, W będą przestrzeniami unormowanymi oraz załóżmy, że operatory $g \in B(U; V)$, $f \in B(V; W)$ spełniają $0 < [g]$, $0 < [f]$. Wówczas:*
(a) $\|f\circ g\| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$;
(b) $[f]\cdot[g] \leqslant [f\circ g]$.

Dowód: Uzasadnimy drugą nierówność. Ustalmy $x \in U$. Wtedy

$$[f]\cdot[g]\cdot\|x\| \leqslant [f]\cdot\|gx\| \leqslant \|f(gx)\| \leqslant \|(f\circ g)x\|.$$

Największą liczbą m spełniającą $m\|x\| \leqslant \|(f \circ g)x\|$ (oczywiście uniwersalną dla wszystkich $x \in U$) jest $[f\circ g]$ zatem z powyższych nierówności dostajemy $[f]\cdot[g] \leqslant [f\circ g]$. Dowód pierwszej nierówności przebiega podobnie. ■

Lemat 1.2 *Niech $f\colon U \to W$ będzie operatorem odwracalnym. Załóżmy, że f, f^{-1} są ciągłe. Wówczas:*

(a) $\|f\| = \frac{1}{[f^{-1}]}$ *oraz* $[f] = \frac{1}{\|f^{-1}\|}$*;*

(b1) *jeżeli* $\|fx\| = \|f\|$ *oraz* $\|x\| = 1$, *to* $\left\|f^{-1}\left(\frac{fx}{\|fx\|}\right)\right\| = [f^{-1}]$*;*

(b2) *jeżeli* $\|fy\| = [f]$ *oraz* $\|y\| = 1$, *to* $\left\|f^{-1}\left(\frac{fy}{\|fy\|}\right)\right\| = \|f^{-1}\|$.

Dowód: Z założenia $f \neq 0 \neq f^{-1}$, więc $\|f\| \neq 0$ oraz $\|f^{-1}\| \neq 0$. Udowodnimy pierwszą równość w podpunkcie (a). Drugą dowodzi się podobnie. Ustalmy dowolnie $y \in W$. Wówczas $\|f(f^{-1}y)\| \leqslant \|f\|\cdot\|f^{-1}y\|$. Zatem dla dowolnego $y \in W$ zachodzi $\frac{1}{\|f\|}\|y\| \leqslant \|f^{-1}y\|$, więc $\frac{1}{\|f\|} \leqslant [f^{-1}]$, czyli $0 < [f^{-1}]$ oraz $\|f\| \geqslant \frac{1}{[f^{-1}]}$.

Jeśli $x \in U$, to $[f^{-1}]\cdot\|fx\| \leqslant \|f^{-1}(fx)\|$. Stąd dla dowolnego $x \in U$ zachodzi $\|fx\| \leqslant \frac{1}{[f^{-1}]}\|x\|$, zatem $\|f\| \leqslant \frac{1}{[f^{-1}]}$. Ostatecznie $\|f\| = \frac{1}{[f^{-1}]}$.

Wykażemy jeszcze tylko (b1). Załóżmy, że $\|x\| = 1$ oraz $\|fx\| = \|f\|$. Wówczas z podpunktu (a) wynika $\left\|f^{-1}\left(\frac{fx}{\|fx\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|fx\|}\|f^{-1}(fx)\| = \frac{1}{\|f\|}\|x\| = [f^{-1}]$. ■

Lemat 1.3 *Niech $f\colon U \to W$ będzie operatorem odwracalnym. Jeżeli $0 < [f]$, to f^{-1} jest ciągłe oraz $\|f^{-1}\| \leqslant \frac{1}{[f]}$.*

Dowód: Niech $w \in W \setminus \{0\}$. Wtedy $[f]\cdot\|f^{-1}w\| \leqslant \|f(f^{-1}w)\|$, zatem $\|f^{-1}w\| \leqslant \frac{1}{[f]}\|w\|$. Ostatnia nierówność orzeka, że f^{-1} jest ciągłe oraz $\|f^{-1}\| \leqslant \frac{1}{[f]}$. ■

Twierdzenie 1.4 *Niech przestrzeń unormowana U będzie zupełna. Załóżmy, że $f\colon U \to W$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym. Jeżeli $0<[f]$, to $f(U)$ jest przestrzenią zupełną.*

Dowód: Ustalmy ciąg $(y_n)_{n=1,2,\ldots} \subset f(U)$ spełniający warunek Cauchy'ego. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in U$ takie, że $fx_n = y_n$. Skoro ciąg $(y_n)_{n=1,2,\ldots}$ spełnia warunek Cauchy'ego, to z nierówności $[f]\cdot\|x_k - x_m\| \leqslant \|fx_k - fx_m\| = \|y_k - y_m\|$ wynika, że $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ również spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem istnieje $x_o \in U$, takie, że $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_o$, ponieważ przestrzeń U jest zupełna. Z ciągłości operatora f otrzymujemy $\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} fx_n = fx_o$ zatem ciąg $(y_n)_{n=1,2,\ldots}$ ma granicę. ■

Lemat 1.5 *Niech $f\colon U \to W$ będzie operatorem i niech $\gamma > 0$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) $\forall_{x,y\in S(U)} : \gamma\|fx\| \leqslant \|fy\|$*;*

(b) $\gamma\|f\| \leqslant [f]$.

Ponadto, każdy z tych warunków implikuje ciągłość f.

Dowód: (a)$\Rightarrow$(b). Skoro w nierówności (a) wektory x, y mogą być dowolne ze sfery jednostkowej, to f musi być ciągłe (bo jest ograniczone na sferze). Zatem $\|f\| < +\infty$. Przechodząc teraz z y do infimum po sferze jednostkowej otrzymujemy $\forall_{x\in S(U)} : \gamma\|fx\| \leqslant [f]$. Następnie przechodząc z x do supremum po sferze jednostkowej dostajemy $\gamma\|f\| \leqslant [f]$.

Wykazaliśmy już, że (a) implikuje (b) oraz ciągłość f. Pozostaje jeszcze do udowodnienia implikacja (b)$\Rightarrow$(a). Ustalmy $x, y \in S(U)$. Wówczas $\gamma\|fx\| \leqslant \gamma\|f\| \leqslant [f] \leqslant \|fy\|$. Skoro wykazano już, że warunki (a), (b) są równoważne, to (b) również implikuje ciągłość. ■

Przypomnimy znane fakty z teorii operatorów określonych na przestrzeni Banacha. Od tego momentu do końca podrozdziału symbolami V, H będziemy oznaczać odpowiednio zespoloną przestrzeń Banacha i Hilberta. Będziemy rozpatrywać tylko przypadek $V, H \neq \{0\}$. Poniższe twierdzenia i ich dowody można znaleźć w książkach [15], [37], [40], [44].

Twierdzenie 1.6 [15, str.158] *Jeżeli $f \in B(V)$ oraz $\|f\| < 1$, to $I - f \in U(B(V))$.*

Definicja 1.7 Zbiór $\sigma(f) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - f \notin U(B(V))\}$ nazywamy *widmem operatora* $f \in B(V)$.

Definicja 1.8 Liczbę $r(f) := \inf\left\{ \sqrt[n]{\|f^n\|} : n = 1, 2, \ldots \right\}$ nazywamy *promieniem spektralnym operatora* $f \in B(V)$.

Lemat 1.9 *Załóżmy, że $f \in B(V)$. Wówczas*

(a) *jeśli $f \in U(B(V))$, to $\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1}$, gdzie $\sigma(f)^{-1} := \{\lambda^{-1} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(f)\}$.*

(a) *jeśli $c \in \mathbb{C}$, to $\sigma(f - cI) = \sigma(f) - c$.*

Dowód: Jeżeli $f \in U(B(V))$, to oczywiście także $f^{-1} \in U(B(V))$ oraz $0 \notin \sigma(f), 0 \notin \sigma(f^{-1})$. Następujące warunki równoważne dowodzą (a): $\lambda \in \sigma(f^{-1})$; $\lambda I - f^{-1} \notin U(B(V))$; $f \circ (\lambda I - f^{-1}) \notin U(B(V))$; $\lambda f - I \notin U(B(V))$; $\frac{1}{\lambda} I - f \notin U(B(V))$; $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(f)$; $\lambda \in \sigma(f)^{-1}$. Kolejne warunki równoważne dowodzą (b): $\lambda \in \sigma(f - cI)$; $\lambda I - (f - cI) \notin U(B(V))$; $(\lambda + c)I - f \notin U(B(V))$; $\lambda + c \in \sigma(f)$; $\lambda \in \sigma(f) - c$. ■

Lemat 1.10 *Niech $f \in B(V)$ będzie odwracalnym operatorem określonym na zespolonej przestrzeni Banacha. Wówczas $\sigma(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : [f] \leqslant |\lambda| \leqslant \|f\|\}$.*

Dowód: Inkluzja $\sigma(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|f\|\}$ jest znana (zob. [15, str.160]), zatem wystarczy wykazać $\sigma(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : [f] \leqslant |\lambda|\}$. Z twierdzenia o operatorze odwrotnym wynika ciągłość operatora f^{-1}. Zatem z punktu (a) lematu 1.2 otrzymujemy $[f] > 0$. Następnie ustalmy $\lambda_o \notin \{\lambda \in \mathbb{C} : [f] \leqslant |\lambda|\}$. Jeśli $\lambda_o = 0$, to $\lambda_o \notin \sigma(f)$, bo f jest odwracalny. Załóżmy teraz, że $\lambda_o \neq 0$. Wtedy $|\lambda_o| < [f]$. Z punktu (a) lematu 1.2 dostajemy $\|f^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda_o|} = |\lambda_o^{-1}|$. Zatem $\lambda_o^{-1} \notin \sigma(f^{-1})$, bo $\sigma(f^{-1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|f^{-1}\|\}$. Skoro $\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1}$ (lemat 1.9), to $\lambda_o^{-1} \notin \sigma(f)^{-1}$. Stąd $\lambda_o \notin \sigma(f)$, a to kończy dowód. ■

Twierdzenie 1.11 [37, str.139] *Niech $f \in B(H)$. Wówczas $r(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$.*

Definicja 1.12 Powiemy, że operator $f \in B(H)$ jest:

(a) *samosprzężony,* jeśli $f = f^*$;

(b) *nieujemny,* jeśli $\langle fx|x\rangle \geqslant 0$ dla $x \in H$.

(c) *dodatnio określony,* jeśli jest samosprzężony oraz $\langle fx|x\rangle > 0$ dla $x \in H \setminus \{0\}$.

Twierdzenie 1.13 *Jeżeli $f \in B(H)$ jest samosprzężony, to wtedy*

$$\|f\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}. \tag{1.1}$$

Dowód: Wykażemy równość $\|f^n\| = \|f\|^n$. Oczywiście $\|f^n\| \leqslant \|f\|^n$, zatem wystarczy pokazać $\|f^n\| \geqslant \|f\|^n$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\|f^n x\|^2 = \langle f^n x | f^n x\rangle = \langle f^{n+1}x | f^{n-1}x\rangle \leqslant \|f^{n+1}x\| \cdot \|f^{n-1}x\|$. Prowadząc teraz dowód indukcyjny ze względu na n można łatwo z powyższej nierówności otrzymać zależność: jeśli $fx \neq 0$, to $f^p x \neq 0$ dla każdego $p \in \mathbb{N}$. Stąd dla $fx \neq 0$ dostajemy $\frac{\|f^n x\|}{\|f^{n-1}x\|} \leqslant \frac{\|f^{n+1}x\|}{\|f^n x\|}$. Zatem ciąg $\left(\frac{\|f^n x\|}{\|f^{n-1}x\|}\right)_{n=1,2,\ldots}$ jest niemalejący, więc $\left(\frac{\|fx\|}{\|x\|}\right)^n \leqslant \frac{\|fx\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|f^2x\|}{\|fx\|} \cdot \frac{\|f^3x\|}{\|f^2x\|} \cdot \ldots \cdot \frac{\|f^{n-1}x\|}{\|f^{n-2}x\|} \cdot \frac{\|f^n x\|}{\|f^{n-1}x\|} = \frac{\|f^n x\|}{\|x\|}$, a stąd $\|fx\|^n \leqslant \|f^n x\| \cdot \|x\|^{n-1}$ dla dowolnego $x \in X$. Zatem dla każdego $\|x\| \leqslant 1$ jest $\|fx\|^n \leqslant \|f^n\|$, więc $\|f\|^n \leqslant \|f^n\|$.

Ostatecznie $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\} = r(f) = \inf\left\{\sqrt[n]{\|f^n\|} : n = 1, 2, \ldots\right\} = \|f\|$. ■

Twierdzenie 1.14 [44, str.349] *Przypuśćmy, że $f \in B(H)$. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) *f jest nieujemny,*

(2) *f jest samosprzężony oraz $\sigma(f) \subset [0, +\infty)$.*

Mamy też następujące twierdzenie o rozkładzie polarnym operatora.

Twierdzenie 1.15 [40, str.96] *Niech $f \in B(H)$. Wówczas istnieją $U, P \in B(H)$ takie, że U jest częściową*[1] *izometrią, P jest nieujemny,* $\ker f = \ker U$ *oraz $f = UP$.*

1.2 Baza względem operatora

Ten podrozdział zawiera lematy i twierdzenia niezbędne do prowadzenia dalszych rozważań. Udowodnimy tutaj twierdzenie o istnieniu pewnej szczególnej bazy, związanej z odwzorowaniem liniowym. Przypuśćmy, że H_1, H_2 są przestrzeniami Hilberta oraz, że niezerowe odwzorowanie liniowe $g\colon H_1 \to H_2$ zachowuje ortogonalność (tzn. spełnia warunek $\forall_{x,y \in X}\ x \perp y \Rightarrow fx \perp fy$). Wówczas g jest injektywne[2] oraz istnieje zbiór $B = \{x_t \in H_1 : t \in T\}$ niezerowych wektorów parami ortogonalnych, takich, że ich obrazy również są parami ortogonalne oraz $H_1 = \overline{\operatorname{Lin} B}$. Istotnie, wystarczy rozważyć dowolny, maksymalny układ ortogonalny.

W tym podrozdziale okaże się, że czasami jest również na odwrót, tzn.: dowolne odwzorowanie liniowe, określone na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej, ma tą własność, że istnieje baza ortogonalna, której obraz jest także układem ortogonalnym. Co więcej, wśród wektorów tej bazy znajdują się takie, które realizują normę operatora.

W całym podrozdziale przez X, Y zawsze będziemy oznaczać przestrzenie unitarne nad tym samym ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Niech odwzorowanie $f\colon X \to Y$ będzie liniowe oraz załóżmy, że $\dim X \geqslant 2$.

Definicja 1.16 Mówimy, że zbiór wektorów $\{x_t \in X \setminus \{0\} : t \in T\}$ jest *f-ortogonalnym układem w X,* jeśli $x_j \perp x_k$ oraz $fx_j \perp fx_k$ dla wszystkich indeksów $j, k \in T$ takich, że $j \neq k$. Mówimy, że powyższy zbiór jest *f-ortonormalnym układem w przestrzeni X*, jeżeli dodatkowo $\|x_t\| = 1$ dla każdego $t \in T$.

[1] tzn.: istnieje domknięta podprzestrzeń K taka, że $U|_K$ jest izometrią oraz $U|_{K^\perp} = 0$; stąd $\ker U = K^\perp$.

[2] Wykażemy w następnym rozdziale, że taki operator jest liniowym podobieństwem, więc też injekcją.

Definicja 1.17 Mówimy, że zbiór wektorów $\{x_t \in X \setminus \{0\} : t \in T\}$ jest *f-ortogonalną bazą w X*, jeśli jest układem f-ortogonalnym oraz $X = \overline{\operatorname{Lin}\{x_t \in X : t \in T\}}$. Powiemy, że powyższy zbiór jest *f-ortonormalną bazą w X*, jeżeli dodatkowo $\|x_t\| = 1$ dla $t \in T$.

Ustalmy $c \in \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$ oraz zdefiniujmy relację $\angle_c \subset X \times X$ wzorem

$$x \angle_c y \;:\Leftrightarrow\; \langle x|y\rangle = c\|x\|\cdot\|y\|.$$

Lemat 1.18 *Załóżmy, że* $\dim X = 2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ *oraz* $0 < |c_1| = |c_2| < 1$. *Niech* $x, y \in S(X)$ *i niech* $f\colon X \to Y$ *będzie operatorem takim, że* $\|fx\| = \|f\|$, $fy \neq 0$ *oraz* $x \angle_{c_1} y$, $fx \angle_{c_2} fy$. *Wtedy* $\|fw\| = \|f\|\cdot\|w\|$ *dla każdego* $w \in X$ *oraz* $c_1 = c_2$.

Dowód: Z założenia dostajemy

$$\langle x|y\rangle = c_1 \quad \text{oraz} \quad \langle fx|fy\rangle = c_2\|f\|\cdot\|fy\|. \tag{1.2}$$

Definiujemy dwie projekcje ortogonalne[3] $P_y\colon X \to X$, $P_{fy}\colon Y \to Y$ wzorami

$$P_y(z) := \tfrac{\langle z|y\rangle}{\|y\|^2}y \quad \text{dla} \quad z \in X; \qquad P_{fy}(u) := \tfrac{\langle u|fy\rangle}{\|fy\|^2}fy \quad \text{dla} \quad u \in Y.$$

Stąd łatwo można uzyskać poniższe równości

$$P_y(x) = c_1 y, \qquad P_{fy}(fx) = c_2\frac{\|f\|}{\|fy\|}fy. \tag{1.3}$$

Najpierw uzasadnimy równość

$$\|f\|\cdot\|x - P_y(x)\| = \|fx - P_{fy}(fx)\|. \tag{1.4}$$

Skoro $|c_1| = |c_2|$, to prawdziwa jest równość

$$\|f\|^2\,(1 - 2\mathrm{Re}|c_1|^2 + |c_1|^2) = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(|c_2|^2\|f\|^2) + |c_2|^2\|f\|^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\|f\|^2\,(1 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{c_1}c_1) + |c_1|^2) = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\overline{c_2}\tfrac{\|f\|}{\|fy\|}c_2\|f\|\cdot\|fy\|\right) + |c_2|^2\|f\|^2.$$

Podstawiając (1.2) do powyższej równości dostaniemy

$$\|f\|^2\,(1 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{c_1}\,\langle x|y\rangle) + |c_1|^2\|y\|^2) = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\overline{c_2}\tfrac{\|f\|}{\|fy\|}\,\langle fx|fy\rangle\right) + |c_2|^2\tfrac{\|f\|^2}{\|fy\|^2}\|fy\|^2.$$

Przekształcając tą równość otrzymujemy dalej

$$\|f\|^2\,(\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x|c_1y\rangle + \|c_1y\|^2) = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle fx\middle|c_2\tfrac{\|f\|}{\|fy\|}fy\right\rangle + \left\|c_2\tfrac{\|f\|}{\|fy\|}fy\right\|^2.$$

Stosując równości (1.3) mamy

$$\|f\|^2\,(\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x|P_y(x)\rangle + \|P_y(x)\|^2) = \|fx\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle fx|P_{fy}(fx)\rangle + \|P_{fy}(fx)\|^2$$

[3] Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H oraz niech $x \in H$. Wówczas istnieje dokładnie jeden element $P_M(x) \in M$ spełniający równość $\|x - P_M(x)\| = \mathrm{dist}(x, M)$. Ponadto, funkcja $H \ni x \mapsto P_M(x) \in H$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym (por. [15, str.95,96], [44, str.333]). W przypadku $M = \mathrm{Lin}\{m\}$ stosujemy zapis P_m.

i ostatecznie

$$\|f\|^2 \cdot \|x - P_y(x)\|^2 = \|fx - P_{fy}(fx)\|^2,$$

więc równość (1.4) jest uzasadniona.

Z definicji projekcji wynika

$$\|fx - P_{fy}(fx)\| = \operatorname{dist}(fx, \operatorname{Lin}\{fy\}). \tag{1.5}$$

Ponadto $f(P_y(x)) = f(c_1 y) = c_1 fy \in \operatorname{Lin}\{fy\}$, zatem

$$\|fx - P_{fy}(fx)\| \leqslant \|fx - f(P_y(x))\|. \tag{1.6}$$

Korzystając kolejno z równości (1.4) oraz nierówności (1.6) mamy

$$\begin{aligned}\|f\| \cdot \|x - P_y(x)\| &= \|fx - P_{fy}(fx)\| \leqslant \|fx - f(P_y(x))\| = \\ &= \|f(x - P_y(x))\| \leqslant \|f\| \cdot \|x - P_y(x)\|.\end{aligned}$$

Zatem z ostatnich równości i nierówności wynika, że musi być

$$\|fx - P_{fy}(fx)\| = \|fx - f(P_y(x))\|.$$

Stąd i z równości (1.5) wnosimy, że w punktach $P_{fy}(fx)$, $f(P_y(x))$ realizuje się odległość $\operatorname{dist}(fx, \operatorname{Lin}\{fy\})$; ale taki punkt jest dokładnie jeden, zatem

$$P_{fy}(fx) = f(P_y(x)). \tag{1.7}$$

Ze wzorów (1.3) i (1.7) dostajemy $c_2 \frac{\|f\|}{\|fy\|} fy = f(c_1 y)$, a stąd

$$c_2 \frac{\|f\|}{\|fy\|} fy = c_1 fy \tag{1.8}$$

czyli $c_2 \frac{\|f\|}{\|fy\|} = c_1$. Skoro $|c_1| = |c_2|$, to widać, że $\frac{\|f\|}{\|fy\|} = 1$ zatem $\|f\| = \|fy\| = \|fx\|$. Wracając do (1.8) możemy obliczyć, że $c_1 = c_2$. Jedna część tezy jest już udowodniona.

Wykażemy jeszcze, że f jest podobieństwem. Niech $w \in X$ będzie dowolnie wybranym wektorem. Skoro x, y są liniowo niezależne[4], a $\dim X = 2$, to $w = \alpha x + \beta y$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Wiemy już, że $\|fx\| = \|f\| = \|fy\|$ oraz $c_1 = c_2 =: c$. Wówczas

$$\begin{aligned}\|fw\|^2 &= \|\alpha fx + \beta fy\|^2 = \|\alpha fx\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \alpha fx | \beta fy\rangle + \|\beta fy\|^2 = \\ &= |\alpha|^2 \|fx\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\alpha\overline{\beta}\langle fx|fy\rangle\right) + |\beta|^2\|fy\|^2 = \\ &= |\alpha|^2 \|fx\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\alpha\overline{\beta}c\|fx\| \cdot \|fy\|\right) + |\beta|^2\|fy\|^2 = \\ &= |\alpha|^2 \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\alpha\overline{\beta}c\|f\|^2\right) + |\beta|^2\|f\|^2 = \\ &= \|f\|^2\left(|\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\alpha\overline{\beta}c\right) + |\beta|^2\right) = \\ &= \|f\|^2\left(|\alpha|^2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\alpha\overline{\beta}\langle x|y\rangle\right) + |\beta|^2\|y\|^2\right) = \\ &= \|f\|^2\left(\|\alpha x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \alpha x|\beta y\rangle + \|\beta y\|^2\right) = \|f\|^2 \cdot \|\alpha x + \beta y\|^2 = \\ &= \|f\|^2 \cdot \|w\|^2,\end{aligned}$$

zatem odwzorowanie liniowe f jest podobieństwem. ■

[4]Z pierwszej równości w (1.2) oraz założeń wynika, że $|\langle x|y\rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$, więc x, y są liniowo niezależne.

Lemat 1.19 *Niech $g_1, g_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi.*
(1) *Jeśli $g_1(a) < g_2(a)$ oraz $g_1(b) > g_2(b)$, to istnieje $k \in (a,b)$ taki, że $g_1(k) = g_2(k)$.*
(2) *Jeśli $g_1(a) \leqslant g_2(a)$ oraz $g_1(b) \geqslant g_2(b)$, to istnieje $k \in [a,b]$ taki, że $g_1(k) = g_2(k)$.*

Dowód: Wystarczy zastosować własność Darboux do funkcji $h := g_1 - g_2$. ■

Lemat 1.20 *Niech $\dim X = 2$. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym i injektywnym. Załóżmy, że wektory $a, b \in S(X)$ spełniają $a \perp b$ oraz $fa \perp fb$. Wówczas $[f] = \|fa\|$ oraz $\|f\| = \|fb\|$ (albo odwrotnie: $[f] = \|fb\|$ oraz $\|f\| = \|fa\|$).*

Dowód: Załóżmy np., że $\|fa\| \leqslant \|fb\|$. Niech $w = \alpha a + \beta b$ będzie dowolnym wektorem o normie równej 1, tzn. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Wtedy $\|fw\|^2 = \|\alpha fa + \beta fb\|^2 = \|\alpha fa\|^2 + \|\beta fb\|^2 = |\alpha|^2\|fa\|^2 + |\beta|^2\|fb\|^2 \geqslant |\alpha|^2\|fa\|^2 + |\beta|^2\|fa\|^2 = \|fa\|^2$.

Podobnie $\|fw\|^2 = \|\alpha fa + \beta fb\|^2 = \|\alpha fa\|^2 + \|\beta fb\|^2 = |\alpha|^2\|fa\|^2 + |\beta|^2\|fb\|^2 \leqslant |\alpha|^2\|fb\|^2 + |\beta|^2\|fb\|^2 = \|fb\|^2$. W ten sposób wykazaliśmy, że dla każdego $w \in S(X)$ zachodzą nierówności $\|fa\| \leqslant \|fw\| \leqslant \|fb\|$, zatem $[f] = \|fa\|$ oraz $\|f\| = \|fb\|$ ■

Lemat 1.21 *Niech $\dim X = \dim Y = 2$. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym i injektywnym. Załóżmy ponadto, że $\|fx\| = \|f\|$ oraz $\|fy\| = [f]$ dla pewnych $x, y \in S(X)$. Wtedy zachodzą trzy następujące warunki:*
(A) $\forall_{u\in X}:\ x \perp u \ \Rightarrow\ fx \perp fu$;
(B) $\forall_{w\in X}:\ y \perp w \ \Rightarrow\ fy \perp fw$.
(C) *jeżeli* $[f] < \|f\|$, *to wówczas* $x \perp y$ *oraz* $fx \perp fy$.

Dowód: Najpierw udowodnimy (A). Jeśli $u = 0$, to implikacja jest prawdziwa. Wybierzmy wektor $u \in X\setminus\{0\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\|u\| = 1$. Niech $x \perp u$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\langle fx|fu\rangle \neq 0$. Wtedy dla pewnego $\eta \in \mathbb{K}$ takiego, że $0 < |\eta| < 1$ zachodzi[5] $\langle fx|fu\rangle = \eta\|fx\|\cdot\|fu\|$. Istnieje liczba $\sigma \in \mathbb{K}$ taka, że $\sigma\eta \in (-1,0)$ oraz $|\sigma| = 1$ $\left(\text{wystarczy } \sigma := -\frac{|\eta|}{\eta}\right)$. Zdefiniujmy teraz $\mu := \sigma\eta \in (-1,0)$ oraz wektor $p := \sigma x$. Stąd $p \perp u$, $\|f\| = \|fp\| = \|fx\|$ oraz $\|p\| = 1$. Następnie z równości $\sigma\langle fx|fu\rangle = \sigma\eta\|fx\|\cdot\|fu\|$ otrzymujemy $\langle fp|fu\rangle = \mu\|fp\|\cdot\|fu\|$.

Definiujemy funkcję $\gamma\colon [0,1] \to S(X)$ wzorem

$$\gamma(t) := \tfrac{tp+(1-t)u}{\|tp+(1-t)u\|} \text{ dla każdego } t \in [0,1].$$

Zauważmy, że $\gamma(0) = u$ i $\gamma(1) = p$. Następnie definiujemy kolejne dwie funkcje $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ oraz $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\varphi(t) := \langle p|\gamma(t)\rangle, \qquad \psi(t) := \left\langle \tfrac{fp}{\|fp\|} \Big| \tfrac{f(\gamma(t))}{\|f(\gamma(t))\|} \right\rangle.$$

Funkcje φ, ψ przyjmują tylko wartości rzeczywiste. Istotnie,

$$\psi(t) = \left\langle \frac{fp}{\|fp\|} \Big| \frac{f\left(\frac{tp+(1-t)u}{\|tp+(1-t)u\|}\right)}{\|f(\gamma(t))\|} \right\rangle = \frac{t}{\|tp+(1-t)u\|\cdot\|fp\|\cdot\|f(\gamma(t))\|}\langle fp|fp\rangle +$$
$$+ \frac{1-t}{\|tp+(1-t)u\|\cdot\|fp\|\cdot\|f(\gamma(t))\|}\langle fp|fu\rangle =$$
$$= \frac{t\|fp\|^2}{\|tp+(1-t)u\|\cdot\|fp\|\cdot\|f(\gamma)\|} + \frac{(1-t)\mu\|fp\|\cdot\|fu\|}{\|tp+(1-t)u\|\cdot\|fp\|\cdot\|f(\gamma)\|} \in \mathbb{R}\,.$$

[5] Oczywiście nie może zachodzić $|\eta| = 1$, bo wektory fx, fu są liniowo niezależne.

Podobnie uzasadniamy $\varphi(t) \in \mathbb{R}$.

Łatwo widać, że $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\psi(0) = \mu < 0$, oraz $\psi(1) = 1$. Funkcja ψ jest ciągła, co z uwagi na własność Darboux, daje nam

$$\psi(t_o) = 0 \text{ dla pewnego } t_o \in (0,1). \tag{1.9}$$

Skoro $\varphi(t_o) = \langle p|\gamma(t_o)\rangle = \left\langle p\middle|\frac{t_o p+(1-t_o)u}{\|t_o p+(1-t_o)u\|}\right\rangle = \frac{t_o}{\|t_o p+(1-t_o)u\|}$, to $\varphi(t_o) > 0$. Zdefiniujmy jeszcze czwartą funkcję $\vartheta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ przez

$$\vartheta(t) := |\psi(t)|.$$

Skoro $\vartheta(0) = |\mu|$, $\vartheta(t_o) \overset{(1.9)}{=} 0$, to wówczas $\varphi(0) < \vartheta(0)$ oraz $\varphi(t_o) > \vartheta(t_o)$. Z lematu 1.19 wynika istnienie $t_1 \in (0, t_o)$ takiego, że $\varphi(t_1) = \vartheta(t_1)$.

Niech $c_1 := \varphi(t_1)$ oraz $c_2 := \psi(t_1)$. Wtedy $|c_1| = |c_2|$, $p\angle_{c_1}\gamma(t_1)$, a także $fp\angle_{c_2} f(\gamma(t_1))$. Ponadto $\|fp\| = \|f\|$. Skoro f jest różnowartościowe, a $\gamma(t_1) \neq 0$, to także $f(\gamma(t_1)) \neq 0$. Możemy teraz skorzystać z lematu 1.18, z którego wynika, że f jest podobieństwem[6]. Zatem, jeśli $x\perp u$, to także $fx \perp fu$, a więc sprzeczność z $\langle fx|fu\rangle \neq 0$.

Teraz wykażemy (B). Załóżmy, że $y\perp w$. Niech $a := \frac{fy}{\|fy\|}$. Z lematu 1.2 otrzymujemy równość $\|f^{-1}a\| = \|f^{-1}\|$. Ustalmy teraz wektor $u \in Y \setminus \{0\}$ taki, że $a\perp u$. Stosując udowodniony już warunek (A) do operatora f^{-1} (oraz jednocześnie do wektora a) otrzymujemy, że $f^{-1}a \perp f^{-1}u$. Stąd $f^{-1}\left(\frac{fy}{\|fy\|}\right) \perp f^{-1}u$, czyli $\frac{1}{\|fy\|} f^{-1}(fy) \perp f^{-1}u$, więc $y\perp f^{-1}u$. Uwzględniając $\dim X = 2$, $y \perp f^{-1}u$ oraz $y\perp w$ zauważamy, że $w = \alpha f^{-1}u$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{K}$, a zatem $fw = \alpha u$. Ostatecznie z $a\perp u$ mamy $\frac{fy}{\|fy\|} \perp \alpha u$, co implikuje $fy \perp fw$.

Pozostaje do wykazania jeszcze (C). Ustalmy wektor $a \in S(X)$ taki, że $a\perp x$. Z udowodnionego już podpunktu (A) wynika, że też $fa\perp fx$. Teraz z lematu 1.20 i równości $\|fx\| = \|f\|$, wynika, że $[f] = \|fa\|$. Skoro a, x są liniowe niezależne i $\dim X = 2$, to $y = \alpha a + \beta x$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ takich, że $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (bo $\|y\| = 1$). Wtedy $\|fy\|^2 = \|\alpha fa + \beta fx\|^2 = \|\alpha fa\|^2 + \|\beta fx\|^2$. Stąd $[f]^2 = |\alpha|^2[f]^2 + |\beta|^2\|f\|^2$. A zatem $(1-|\alpha|^2)[f]^2 = |\beta|^2\|f\|^2$, czyli $|\beta|^2[f]^2 = |\beta|^2\|f\|^2$. Skoro $[f] < \|f\|$, to $\beta = 0$, więc $y = \alpha a$ oraz $fy = \alpha fa$. Wiemy, że $x\perp a$ oraz $fx \perp fa$, a to oznacza także $x\perp y$, $fx\perp fy$. ■

Jako wniosek z powyższych lematów można uzyskać poniższy fakt, bez założenia o wymiarze przestrzeni.

Twierdzenie 1.22 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym i injektywnym. Załóżmy ponadto, że $\|fx\| = \|f\|$ oraz $\|fy\| = [f]$ dla pewnych $x, y \in S(X)$. Wtedy zachodzą trzy następujące warunki:*

(A) $\forall_{u\neq 0}: \ x\perp u \ \Rightarrow \ fx\perp fu$;

(B) $\forall_{w\neq 0}: \ y\perp w \ \Rightarrow \ fy\perp fw$.

(C) *jeżeli* $[f] < \|f\|$, *to wówczas* $x\perp y$ *oraz* $fx\perp fy$.

Dowód: Warunki (A) oraz (B) dowodzi się w ten sam sposób, dlatego uzasadnimy tylko (A). Ustalmy $u \in X \setminus \{0\}$ taki, że $x\perp u$. Wówczas odwzorowanie $f|_{\mathrm{Lin}\{x,u\}}\colon \mathrm{Lin}\{x,u\} \to f(\mathrm{Lin}\{x,u\})$ spełnia założenia powyższego lematu, w szczególności $\|f|_{\mathrm{Lin}\{x,u\}}\| = \|fx\|$ (dokładniej: $\|f|_{\mathrm{Lin}\{x,u\}}\| = \|fx\|_{\mathrm{Lin}\{fx,fu\}}$). Zatem $fx\perp fu$.

[6] Skoro f jest liniowym podobieństwem, to można wykazać, że istnieje stała $\nu \neq 0$ taka, że dla wszystkich wektorów $w, z \in X$ jest $\langle fw|fz\rangle = \nu\,\langle w|z\rangle$.

Wykażemy jeszcze (C). Rozważmy odwzorowanie $f|_{\mathrm{Lin}\{x,y\}} \colon \mathrm{Lin}\{x,y\} \to f(\mathrm{Lin}\{x,y\})$. Możemy teraz do tego odwzorowania zastosować podpunkt (C) z lematu 1.21. Wtedy wektory x, y są ortogonalne w podprzestrzeni $\mathrm{Lin}\{x,y\}$, a więc także w X. Podobnie ortogonalność $f|_{\mathrm{Lin}\{x,y\}}(x) \perp f|_{\mathrm{Lin}\{x,y\}}(y)$ implikuje $fx \perp fy$. ■

Używając symbolu dopełnienia ortogonalnego zbioru, możemy powyższe twierdzenie zapisać w podanej niżej postaci. Zapis ten będzie wygodniejszy w kolejnych rozważaniach.

Twierdzenie 1.23 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi. Niech $f \colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym i injektywnym. Załóżmy ponadto, że $\|fx\| = \|f\|$ oraz $\|fy\| = [f]$ dla pewnych $x, y \in S(X)$. Wtedy zachodzą trzy następujące warunki:*
(A) $\forall_{u \neq 0} \colon\ u \in x^{\perp} \Rightarrow fu \in \{fx\}^{\perp}$;
(B) $\forall_{w \neq 0} \colon\ w \in y^{\perp} \Rightarrow fw \in \{fy\}^{\perp}$.
(C) *jeżeli $[f] < \|f\|$, to wówczas $x \perp y$ oraz $fx \perp fy$.*

Wykażemy teraz główny wynik podrozdziału, który orzeka, że każdy różnowartościowy operator określony na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej zachowuje ortogonalność pewnej bazy (tzn. obraz tej bazy jest układem ortogonalnym w przeciwdziedzinie).

Twierdzenie 1.24 (o bazie względem operatora) *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi oraz niech $\dim X = n \geqslant 2$. Załóżmy ponadto, że $f \colon X \to Y$ jest liniowym odwzorowaniem injektywnym. Wówczas istnieje n wektorów jednostkowych $x_1, x_2, \dots, x_n \in S(X)$, które spełniają $[f] = \|fx_1\| \leqslant \|fx_2\| \leqslant \dots \leqslant \|fx_n\| = \|f\|$, a także $x_j \perp x_k$ oraz $fx_j \perp fx_k$ dla wszystkich $j \neq k$ gdzie $j, k = 1, 2, \dots, n$.*

Dowód: Jeśli $[f] = \|f\|$, to f jest podobieństwem. Ustalmy teraz dowolną bazę ortonormalną $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$. Wtedy $fe_k \perp fe_m$ dla $k \neq m$ gdzie $k, m = 1, \dots, n$.

Rozważymy teraz przypadek kiedy $[f] < \|f\|$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na wymiar przestrzeni X. Niech $n = 2$ i rozpatrzmy odwzorowanie $f \colon X \to f(X)$. Skoro przestrzeń X jest skończenie wymiarowa, to sfera jednostkowa jest zbiorem zwartym, f jest ciągłe, zatem funkcja $S(X) \ni x \mapsto \|fx\| \in \mathbb{R}$ realizuje kresy. Wtedy istnieją dwa różne wektory $x_1, x_2 \in S(X)$ takie, że $\|fx_1\| = [f]$ oraz $\|fx_2\| = \|f\|$. Z twierdzenia 1.22 (warunek (C)) dostajemy

$$x_1 \perp x_2 \quad \text{oraz} \quad fx_1 \perp fx_2,$$

zatem dla $n = 2$ twierdzenie jest udowodnione.

Załóżmy teraz, że $n = 3$. Znowu ze zwartości sfery wynika, że dla pewnych $x_1, x_3 \in S(X)$ jest $[f] = \|fx_1\|$, $\|f\| = \|fx_3\|$. Stosując punkt (C) z twierdzenia 1.23 dostajemy

$$x_1 \perp x_3 \quad \text{oraz} \quad fx_1 \perp fx_3.$$

Stąd i z punktów (A), (B) z tego samego twierdzenia dostajemy warunek

$$\forall_{w \in X} \colon\ w \in \{x_1, x_3\}^{\perp} \Rightarrow fw \in \{fx_1, fx_3\}^{\perp},$$

który pozwala rozważyć operator

$$f|_{\{x_1,x_3\}^{\perp}} \colon \{x_1, x_3\}^{\perp} \to \{fx_1, fx_3\}^{\perp}.$$

Skoro w tym etapie dowodu $\dim X = 3$, to $\dim\{x_1, x_3\}^\perp = 1$. Wybierzmy teraz dowolnie wektor jednostkowy $x_2 \in \{x_1, x_3\}^\perp$. Wówczas $\{x_1, x_2, x_3\}$ jest bazą f-ortonormalną, czyli twierdzenie jest prawdziwe również dla $n = 3$.

Ustalmy teraz dowolnie $n > 3$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla każdego $m \in \mathbb{N}$ takiego, że $2 \leqslant m < n$. Ponownie z założenia o skończonym wymiarze wynika, że istnieją dwa różne wektory $x_1, x_n \in S(X)$ takie, że $\|fx_1\| = [f]$ oraz $\|fx_n\| = \|f\|$. Z twierdzenia 1.23 (warunek (C)) dostajemy

$$x_1 \perp x_n \quad \text{oraz} \quad fx_1 \perp fx_n. \tag{1.10}$$

Uwzględniając jednocześnie podpunkty (A), (B) z twierdzenia 1.23 oraz (1.10), otrzymujemy warunek

$$\forall_{w \in X}: \; w \in \{x_1, x_n\}^\perp \;\Rightarrow\; fw \in \{fx_1, fx_n\}^\perp, \tag{1.11}$$

który umożliwia rozważenie operatora $f|_{\{x_1,x_n\}^\perp}: \{x_1, x_n\}^\perp \to \{fx_1, fx_n\}^\perp$. Oczywiście $\dim\{x_1, x_n\}^\perp = n-2$, zatem z założenia indukcyjnego[7] wynika, że istnieje $n-2$ wektorów $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1} \in S\left(\{x_1, x_n\}^\perp\right)$ takich, że $\|fx_2\| \leqslant \|fx_3\| \leqslant \ldots \leqslant \|fx_{n-1}\|$, a także

$$x_j \perp x_k \quad \text{oraz} \quad f|_{\{x_1,x_n\}^\perp}(x_j) \perp f|_{\{x_1,x_n\}^\perp}(x_k), \quad \text{gdzie } j \neq k, \; j,k = 2, \ldots, n-1. \tag{1.12}$$

Skoro $x_2, \ldots, x_{n-1} \in \{x_1, x_n\}^\perp$, to z (1.10), (1.11) oraz z (1.12) dostajemy

$$x_j \perp x_k \text{ oraz } fx_j \perp fx_k \text{ dla } j \neq k, \; j,k = 1, \ldots, n.$$

Uzasadniliśmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla n, co kończy indukcyjny dowód twierdzenia. ■

Rozważmy n-wymiarową przestrzeń wektorową V oraz dwa dowolnie ustalone iloczyny skalarne $\langle\cdot|\cdot\rangle_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_2 : V \times V \to \mathbb{K}$. Jeśli teraz zdefiniujemy odwzorowanie liniowe $f: (V, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \to (V, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ wzorem $fx := x$, to wówczas z twierdzenia o bazie względem operatora otrzymujemy następujący wynik.

Wniosek 1.25 *Dla dowolnych dwóch iloczynów skalarnych określonych w tej samej, skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V, istnieje baza w V, która jest ortogonalna jednocześnie w sensie obu iloczynów skalarnych.*

Jako drugi wniosek możemy teraz podać rezultat, w którym nie ma założenia o injektywności odwzorowania. Wykażemy w ten sposób, że dla ustalonego operatora f istnieje f-ortonormalny układ będący bazą w X.

Twierdzenie 1.26 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi oraz niech $\dim X = n$. Załóżmy ponadto, że $f: X \to Y$ jest liniowym odwzorowaniem. Wówczas istnieje n wektorów jednostkowych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S(X)$, które spełniają $[f] = \|fx_1\| \leqslant \|fx_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|fx_n\| = \|f\|$, a także $x_j \perp x_k$ oraz $fx_j \perp fx_k$ dla wszystkich $j \neq k$ gdzie $j,k = 1, 2, \ldots, n$.*

[7] Teraz widać dlaczego musieliśmy dowodzić również dla $n = 3$. Indukcję „zaczęliśmy od 2". Gdyby „przypadek dla 3" nie został udowodniony, to w drugim etapie dowodu indukcyjnego nie moglibyśmy np. dla $n = 3$ korzystać z założenia indukcyjnego, bo wtedy $n - 2 = 1$, a rezultat nie jest prawdziwy dla $k = 1$, gdyż bazę ortonormalną rozważamy w co najmniej dwuwymiarowej przestrzeni.

Dowód: Załóżmy, że $\dim\ker f = k$ oraz $\dim(\ker f)^{\perp} = m$, gdzie $k+m = n$. Odwzorowanie $f|_{(\ker f)^{\perp}} : (\ker f)^{\perp} \to Y$ jest injekcją i spełnia założenia poprzedniego twierdzenia, więc istnieją jednostkowe wektory $x_1, x_2, \ldots, x_m \in (\ker f)^{\perp}$, parami ortogonalne i takie, że ich obrazy są również parami ortogonalne. Następnie wystarczy ustalić dowolne wektory $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_{m+k} \in S(X) \cap \ker f$, parami ortogonalne. ■

Wykazaliśmy w ten sposób, że f-ortonormalny układ będący bazą zawsze istnieje (oczywiście przy założeniu, że dziedzina jest skończenie wymiarowa) i wśród wektorów tej bazy istnieje wektor realizujący normę operatora f. Okazuje się, że jest również na odwrót. Jeśli wybierzemy jakąś inną bazę f-ortonormalną, to wśród jej wektorów zawsze znajdzie się wektor realizujący normę operatora f.

Twierdzenie 1.27 *Niech X, Y, f będą takie, jak w założeniach poprzedniego twierdzenia. Załóżmy, że $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest dowolną f-ortonormalną bazą w X. Wówczas dla pewnych wektorów x_j, x_k z tej bazy mamy $[f] = \|fx_j\|$ oraz $\|f\| = \|fx_k\|$.*

Dowód: Bez straty ogólności, możemy założyć, że wektory są tak ponumerowane aby $\|fx_1\| \leqslant \|fx_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|fx_n\|$. Ustalmy dowolnie wektor jednostkowy $x = \sum\limits_{p=1}^{n} \alpha_p x_p$, tzn. $\sum\limits_{p=1}^{n} |\alpha_p|^2 = 1$. Wówczas

$$\|fx\|^2 = \left\|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p f x_p\right\|^2 = \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|^2 \|fx_p\|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|^2 \|fx_n\|^2 =$$
$$= \|fx_n\|^2 \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|^2 = \|fx_n\|^2.$$

W ten sposób pokazaliśmy nierówność $\|fx\| \leqslant \|fx_n\|$ dla dowolnego $x \in S(X)$. Przechodząc z x do supremum po sferze otrzymujemy $\|f\| \leqslant \|fx_n\|$, a stąd $\|f\| = \|fx_n\|$. Podobnie można pokazać równość $[f] = \|fx_1\|$. ■

Ostatnie twierdzenie sugeruje sposób wyznaczenia normy operatora. Niech f będzie danym operatorem (cały czas zakładamy skończony wymiar dziedziny). Następnie wystarczy znaleźć dowolną f-ortonormalną bazę; załóżmy, że tą znalezioną bazą jest $w_1, \ldots, w_n$. Zgodnie z twierdzeniem 1.27, wśród liczb $\|fw_1\|, \ldots, \|fw_n\|$ jest norma operatora f. Zatem zamiast szukać wektora realizującego normę operatora na całej sferze jednostkowej, wystarczy szukać na pewnym skończonym podzbiorze sfery.

W końcowej części podrozdziału zbadamy czy dla różnowartościowego operatora f jest możliwe powiększenie danego układu f-ortonormalnego. Dalsze twierdzenie i przykład pokażą, że jest to wykonalne o ile dopełnienie ortogonalne tego układu jest dostatecznie duże. Niech W będzie przestrzenią unormowaną.

Definicja 1.28 Powiemy, że zbiór $A \subset W^*$ jest *totalny* gdy $\forall_{x \in W\setminus\{0\}} \exists_{\varphi\in A} : \varphi(x) \neq 0$, lub równoważnie, gdy $\forall_{x\in W} \; [(\forall_{\varphi\in A}\, \varphi(x) = 0) \Rightarrow x = 0]$.

Twierdzenie 1.29 *Niech W będzie przestrzenią unormowaną oraz niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in W^*$. Jeżeli $\dim W > n$, to zbiór $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ nie jest totalny.*

Dowód: Wykażemy, że $\dim \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \geqslant 1$. Załóżmy najpierw, że $\dim W = m < \infty$ (stąd $n < m$). Niech $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset W$ będzie ustaloną bazą w W. Rozważmy układ równań $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$ gdzie[8] $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in W$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego otrzymujemy nietrywialne rozwiązanie tego układu, ponieważ liczba niewiadomych jest większa od liczby równań. Zatem zbiór rozwiązań tworzy nietrywialną podprzestrzeń w W, stąd $\dim \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \geqslant 1$.

Rozpatrzmy teraz przypadek $\dim W = \infty$. Wykażemy, że $\dim \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k = \infty$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę funkcjonałów. Niech $n = 1$. Jeśli $\varphi_1 = 0$, to $W = \ker \varphi_1$, a więc $\dim \ker \varphi_1 = \infty$. Niech teraz $\varphi_1 \neq 0$. Wtedy dla pewnego $w \in W \setminus \{0\}$ mamy równość[9] $W = \operatorname{Lin}\{w\} \oplus \ker \varphi_1$, więc $\dim \ker \varphi_1 = \infty$.

Załóżmy teraz, że twierdzenie zachodzi dla ustalonego $n > 1$. Pokażemy, że zachodzi również dla $n + 1$. Ustalmy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \in W^*$. Podobnie jak przed chwilą, możemy uzasadnić $\dim \ker \varphi_{n+1} = \infty$. Zauważmy, że dla $k = 1, \ldots, n$ prawdziwa jest równość $\ker \varphi_{n+1} \cap \ker \varphi_k = \ker \varphi_k|_{\ker \varphi_{n+1}}$. Stąd

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \ker \varphi_k = \ker \varphi_{n+1} \cap \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k|_{\ker \varphi_{n+1}} . \tag{1.13}$$

Funkcjonały $\varphi_k|_{\ker \varphi_{n+1}} \colon \ker \varphi_{n+1} \to \mathbb{K}$ gdzie $k = 1, \ldots, n$ oraz przestrzeń $\ker \varphi_{n+1}$ spełniają założenia indukcyjne, stąd iloczyn mnogościowy po prawej stronie w (1.13) jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, a zatem iloczyn po lewej stronie także.

Nierówność $\dim \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \geqslant 1$ jest wykazana (już bez względu na wymiar W). Ustalmy wektor $u \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k$ taki, że $u \neq 0$. Wówczas $\varphi_1(u) = 0, \ldots, \varphi_n(u) = 0$, więc zbiór $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ nie może być totalny, ponieważ $u \neq 0$. ■

Twierdzenie 1.30 *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unitarnymi i niech $f \in B(X;Y)$ będzie operatorem różnowartościowym. Załóżmy ponadto, że wektory $x_1, \ldots, x_n \in S(X)$ są układem f-ortonormalnym. Jeżeli $\dim\{x_1, \ldots, x_n\}^\perp > n$, to istnieje wektor $a \in X$ taki, że zbiór $\{x_1, \ldots, x_n, a\}$ jest również układem f-ortonormalnym.*

Dowód: Rozważmy ciągłe funkcjonały liniowe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon \{x_1, \ldots, x_n\}^\perp \to \mathbb{K}$ określone wzorem $\varphi_k(\cdot) := \langle f(\cdot) | f x_k \rangle$ dla $k = 1, \ldots, n$. Skoro $\dim\{x_1, \ldots, x_n\}^\perp > n$, to zbiór $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ nie jest totalny w przestrzeni $\left(\{x_1, \ldots, x_n\}^\perp\right)^*$ na mocy twierdzenia 1.29. Zatem istnieje $b \in \{x_1, \ldots, x_n\}^\perp \setminus \{0\}$ spełniające $\varphi_k(b) = 0$ dla każdego $k = 1, \ldots, n$. Poszukiwanym wektorem jest $a := \frac{b}{\|b\|}$. ■

Przykład 1.31 Pokażemy teraz, że nierówności $\dim\{x_1, \ldots, x_n\}^\perp > n$ nie można osłabić. Rozpatrzmy $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Następnie zdefiniujmy operator $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, określony przez $f(x, y, z, t) := (x, 2y, 3z, 4t)$ i wybierzmy wektory $u = (1, 1, 0, 0)$, $w = (0, 0, 1, 1)$. Bardzo łatwo można sprawdzić, że $u \perp w$ oraz $fu \perp fw$,

[8] Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_m$ są współrzędnymi wektora x względem bazy B.

[9] Dla każdego $x^* \in W^* \setminus \{0\}$ zachodzi równość $\operatorname{codim} \ker x^* = 1$.

stąd $\{u,w\}$ jest układem f-ortonormalnym. Wszystkie założenia z powyższego twierdzenia są spełnione oprócz $\dim\{u,w\}^\perp > 2$. Zbiór $\{u,w\}$ jest maksymalnym układem f-ortonormalnym. Istotnie, gdyby istniał niezerowy wektor $a = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ $\{u,w,a\}$ mógłby być układem f-ortonormalnym, to w szczególności $a \perp u$, $fa \perp fu$ oraz $a \perp w$, $fa \perp fw$. Stąd otrzymalibyśmy układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ 9\gamma + 16\delta = 0, \end{cases}$$

który miałby jedyne rozwiązanie $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,0,0,0)$. Zatem układu $\{u,w\}$ nie można powiększyć.

1.3 Przykład ciągłego operatora liniowego nie posiadającego związanej z nim bazy

Pojawia się teraz pytanie, czy w przypadku nieskończenie wymiarowym zachodzi podobny wynik jak w poprzednim podrozdziale. Mianowicie, czy dla nieskończenie wymiarowych przestrzeni Hilberta X, Y i dla ciągłego odwzorowanie liniowego $f\colon X \to Y$, istnieje układ f-ortonormalny $\{x_k \in X : k \in \mathcal{K}\}$ taki, że $\overline{\operatorname{Lin}\{x_k \in X : k \in \mathcal{K}\}} = X$? W tym podrozdziale μ będzie oznaczać miarę Lebesgue'a.

Lemat 1.32 *Załóżmy, że $\psi, h \in L^2([0,1])$, $\|h\|_2 > 0$ oraz dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$ zachodzi $\psi h = \lambda h$ μ-p.w. Wtedy ψ jest stała na pewnym zbiorze miary dodatniej.*

Dowód: Istnieje zbiór $A \subset [0,1]$ taki, że $\mu(A) > 0$ oraz $h(t) \neq 0$ dla każdego $t \in A$. Istnieje także zbiór miary zero $B \subset [0,1]$ taki, że $\psi(t)h(t) = \lambda h(t)$ dla $t \in [0,1] \setminus B$. Stąd dla każdego $t \in A \cap ([0,1] \setminus B)$ mamy $(\psi(t) - \lambda)\, h(t) = 0$ oraz $h(t) \neq 0$. Zatem $\psi(t) = \lambda$ dla $t \in A \cap ([0,1] \setminus B)$. Wystarczy jeszcze wykazać $\mu\,(A \cap ([0,1] \setminus B)) > 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mu\,(A \cap ([0,1] \setminus B)) = \mu\,(A \setminus B) = \mu\,(A \cup B) - \mu\,(A \cap B) - \mu(B \setminus A) \geqslant \\ \geqslant \mu\,(A) - \mu\,(B) - \mu(B) = \mu\,(A) > 0, \end{aligned}$$

więc dowód został zakończony. ■

Przykład 1.33 Rozważmy rzeczywistą przestrzeń Hilberta $H = L^2([0,1])$ oraz funkcję $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $\varphi(t) := t$ dla $t \in [0,1]$. Definiujemy następnie operator liniowy $T\colon H \to H$ wzorem $T(h) := \varphi \cdot h$ dla $h \in H$. Dla dowolnych $h, g \in H$ jest

$$\begin{aligned} \|T(h)\|_2^2 &= \|\varphi h\|_2^2 = \int_{[0,1]} |\varphi(t)h(t)|^2 dt = \int_{[0,1]} |\varphi(t)|^2 |h(t)|^2 dt \leqslant \\ &\leqslant \max\left\{|\varphi(t)|^2 : t \in [0,1]\right\} \cdot \int_{[0,1]} |h(t)|_2^2 dt = \|h\|_2^2 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\langle T(h)|g\rangle &= \langle \varphi h|g\rangle = \int\limits_{[0,1]} \varphi(t)h(t)g(t)dt = \int\limits_{[0,1]} h(t)\varphi(t)g(t)dt = \\ &= \langle h|\varphi g\rangle = \langle h|T(g)\rangle\,,\end{aligned}$$

zatem T jest ciągłe, $\|T\| \leqslant 1$ oraz $T^* = T$. Ponadto T jest różnowartościowe. Istotnie, dla $k \in \ker T$ mamy $T(k) = 0$, co oznacza, że $\varphi k = 0$ μ-p.w., a stąd $\varphi k = 0 \cdot k$ μ-p.w. Gdyby $k \neq 0$, to z lematu 1.32 wynikałoby, że φ jest stała na zbiorze miary dodatniej. Zatem musi być $k = 0$ μ-p.w., a więc $\ker T = \{0\}$. Odwzorowanie TT również jest różnowartościowe, ciągłe oraz $TT(h) = \varphi^2 h$.

Wykażemy, że nie istnieje baza T-ortonormalna. Załóżmy nie wprost, że istnieje zbiór wektorów jednostkowych, parami ortogonalnych (zbiór ten jest przeliczalny, bo H jest przestrzenią ośrodkową) $\{x_k \in H : k = 1, 2, \ldots\}$ taki, że $\overline{\mathrm{Lin}\,\{x_k \in H : k = 1, 2, \ldots\}} = H$ oraz $x_j \perp x_k$, $Tx_j \perp Tx_k$ dla wszystkich $j \neq k$. Zauważmy, że

$$0 = \langle Tx_1|Tx_k\rangle = \langle TTx_1|x_k\rangle \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots$$

oraz

$$0 = \langle x_1|x_k\rangle \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots,$$

zatem $x_1, TTx_1 \perp \{x_k \in X : k = 2, 3, \ldots\}$. Z liniowości i ciągłości iloczynu skalarnego dostajemy także

$$x_1, TTx_1 \perp \overline{\mathrm{Lin}\,\{x_k \in X : k = 2, 3, \ldots\}}. \tag{1.14}$$

Skoro $\dim \left(\overline{\mathrm{Lin}\,\{x_k \in X : k = 2, 3, \ldots\}}\right)^{\perp} = 1$, to z warunku (1.14) mamy równość

$$TTx_1 = \lambda x_1 \tag{1.15}$$

dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$. Zauważmy, że operator TT jest różnowartościowy, więc $\lambda \neq 0$, ponieważ $x_1 \neq 0$. Z równości (1.15) dostajemy $\varphi^2 x_1 = \lambda x_1$ μ-p.w. Z lematu 1.32 wynika, że φ^2 jest funkcją stałą na zbiorze miary dodatniej, więc dostaliśmy sprzeczność.

Pokażemy jeszcze, że w przypadku przestrzeni nieośrodkowej, również pewien operator S może nie mieć układu S-ortonormalnego, który byłby zupełny. Rozważmy znowu przestrzeń Hilberta $H = L^2([0,1])$ i niech $\mathcal{K}$ będzie ustalonym, niepustym zbiorem. Suma prosta przestrzeni

$$\bigoplus H := \left\{ (x_k)_{k\in\mathcal{K}} : x_k \in H \text{ dla } k \in \mathcal{K},\ \sum_{k\in\mathcal{K}} \|x_k\|_2^2 < +\infty \right\},$$

z iloczynem skalarnym zadanym przez $\left\langle (x_k)_{k\in\mathcal{K}} | (y_k)_{k\in\mathcal{K}} \right\rangle_{\oplus} := \sum_{k\in\mathcal{K}} \langle x_k|y_k\rangle$, jest przestrzenią Hilberta.

Lemat 1.34 *Jeśli $\mathcal{K}$ jest nieprzeliczalny, to $\bigoplus H$ jest przestrzenią nieośrodkową.*

Dowód: Wybierzmy dowolny jednostkowy wektor $a \in H$. Ustalmy $k_o \in \mathcal{K}$ i zdefiniujmy $\widehat{e}_{k_o} \in \bigoplus H$ wzorem

$$\widehat{e}_{k_o} = (x_k)_{k\in\mathcal{K}} := \begin{cases} x_k = a & \text{gdy} \quad k = k_o, \\ x_k = 0 & \text{gdy} \quad k \neq k_o. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla $l, p \in \mathcal{K}$ mamy $\widehat{e}_l \perp \widehat{e}_p$ ilekroć $l \neq p$, więc zbiór $\{\widehat{e}_{k_o} : k_o \in \mathcal{K}\}$ jest nieprzeliczalnym układem ortonormalnym. Stąd przestrzeń $\bigoplus H$ nie jest ośrodkowa. ∎

Przykład 1.35 Rozważmy tą samą funkcję φ i ten sam operator T z przykładu 1.33. Niech $S\colon \bigoplus H \to \bigoplus H$ będzie operatorem liniowym określonym następującym wzorem

$$S\left((x_k)_{k\in\mathcal{K}}\right) := (Tx_k)_{k\in\mathcal{K}}\,.$$

Operator S jest również ciągły oraz $S^* = S$. Istotnie, dla $(x_k)_{k\in\mathcal{K}}, (y_k)_{k\in\mathcal{K}} \in \bigoplus H$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left\|S\left((x_k)_{k\in\mathcal{K}}\right)\right\|_\oplus^2 &= \left\|(Tx_k)_{k\in\mathcal{K}}\right\|_\oplus^2 = \sum_{k\in\mathcal{K}} \|Tx_k\|_2^2 \leqslant \sum_{k\in\mathcal{K}} \|T\|^2 \cdot \|x_k\|_2^2 = \|T\|^2 \cdot \sum_{k\in\mathcal{K}} \|x_k\|_2^2 = \\ &= \|T\|^2 \cdot \left\|(x_k)_{k\in\mathcal{K}}\right\|_\oplus^2\end{aligned}$$

jak również

$$\begin{aligned}\left\langle S\left((x_k)_{k\in\mathcal{K}}\right) | (y_k)_{k\in\mathcal{K}}\right\rangle_\oplus &= \left\langle (Tx_k)_{k\in\mathcal{K}} | (y_k)_{k\in\mathcal{K}}\right\rangle_\oplus = \sum_{k\in\mathcal{K}} \langle Tx_k | y_k\rangle = \sum_{k\in\mathcal{K}} \langle x_k | Ty_k\rangle = \\ &= \left\langle (x_k)_{k\in\mathcal{K}} | (Ty_k)_{k\in\mathcal{K}}\right\rangle_\oplus = \left\langle (x_k)_{k\in\mathcal{K}} | S\left((y_k)_{k\in\mathcal{K}}\right)\right\rangle_\oplus\,.\end{aligned}$$

Załóżmy nie wprost, że istnieje zbiór wektorów jednostkowych, parami ortonormalnych $\{(x_k^u)_{k\in\mathcal{K}} \in \bigoplus H : u \in \mathcal{U}\}$ taki, że $\overline{\operatorname{Lin}\{(x_k^u)_{k\in\mathcal{K}} \in \bigoplus H : u \in \mathcal{U}\}} = \bigoplus H$ (gdzie $\mathcal{U}$ jest pewnym zbiorem indeksów) oraz

$$(x_k^u)_{k\in\mathcal{K}} \perp (x_k^w)_{k\in\mathcal{K}},\ S\left((x_k^u)_{k\in\mathcal{K}}\right) \perp S\left((x_k^w)_{k\in\mathcal{K}}\right) \text{ dla } u \neq w \text{ gdzie } u, w \in \mathcal{U}.$$

Ustalmy teraz $u_1 \in \mathcal{U}$. Wówczas dla każdego $u \in \mathcal{U} \setminus \{u_1\}$ mamy

$$0 = \left\langle S\left((x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}}\right) | S\left((x_k^u)_{k\in\mathcal{K}}\right)\right\rangle = \left\langle SS\left((x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}}\right) | (x_k^u)_{k\in\mathcal{K}}\right\rangle = \left\langle (TTx_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} | (x_k^u)_{k\in\mathcal{K}}\right\rangle,$$

a także $(x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} \perp (x_k^u)_{k\in\mathcal{K}}$ Zatem

$$(x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}}, (TTx_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} \perp \left\{(x_k)_{k\in\mathcal{K}}^u \in \bigoplus H : u \in \mathcal{U} \setminus \{u_1\}\right\}.$$

Stąd oraz z liniowości i z ciągłości iloczynu skalarnego dostajemy również

$$(x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}}, (TTx_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} \perp \overline{\operatorname{Lin}\left\{(x_k^u)_{k\in\mathcal{K}} \in \bigoplus H : u \in \mathcal{U} \setminus \{u_1\}\right\}}. \tag{1.16}$$

Skoro $\dim\left(\overline{\left\{(x_k^u)_{k\in\mathcal{K}} \in \bigoplus H : u \in \mathcal{U} \setminus \{u_1\}\right\}}\right)^\perp = 1$, to z warunku (1.16) mamy równość $(TTx_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} = \lambda (x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}$. Równość ta implikuje $TTx_k^{u_1} = \lambda x_k^{u_1}$ dla każdego $k \in \mathcal{K}$. Skoro $(x_k^{u_1})_{k\in\mathcal{K}} \neq 0$, to dla pewnego $k_1 \in \mathcal{K}$ jest $x_{k_1}^{u_1} \neq 0$. Operator TT jest różnowartościowy (bo T jest różnowartościowy) zatem równość $TTx_{k_1}^{u_1} = \lambda x_{k_1}^{u_1}$ oznacza, że $\lambda \neq 0$. Ostatnia równość dostarcza $\varphi^2 x_{k_1}^{u_1} = \lambda x_{k_1}^{u_1}$ μ-p.w. (zob. lemat 1.32). Podobnie jak w przykładzie 1.33 otrzymujemy sprzeczność.

Pomimo, że dla różnowartościowego operatora $f \in B(X;Y)$ określonego na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta X może nie istnieć baza f-ortonormalna, to jednak zawsze istnieje maksymalny układ f-ortonormalny. Co więcej, okazuje się, że jest on zawsze zbiorem nieskończonym. Ponadto, każdy układ f-ortonormalny można uzupełnić do maksymalnego (w sensie inkluzji) i nieskończonego.

Twierdzenie 1.36 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi. Załóżmy ponadto, że* $\dim X = \infty$. *Jeżeli $f \in B(X;Y)$ jest operatorem różnowartościowym i $A \subset X$ jest układem f-ortonormalnym, to wówczas istnieje nieskończony, maksymalny układ f-ortonormalny M taki, że $A \subset M$.*

Dowód: Najpierw pokażemy, że w ogóle istnieje jakikolwiek układ f-ortonormalny. Ustalmy liniowo niezależne wektory $u, w \in X$. Stosując twierdzenie 1.24 (o bazie względem operatora) do odwzorowania $f|_{\mathrm{Lin}\{u,w\}} \colon \mathrm{Lin}\{u,w\} \to Y$ otrzymujemy pewne wektory $x_1, x_2 \in S(X) \cap \mathrm{Lin}\{u,w\}$ spełniające $x_1 \perp x_2$ oraz $fx_1 \perp fx_2$. Stąd $\{x_1, x_2\}$ jest układem f-ortonormalnym.

Niech $\mathcal{U}$ oznacza rodzinę wszystkich układów f-ortonormalnych zawiarających A. Relacja "$\subset$" wprowadza częściowy porządek w zbiorze $\mathcal{U}$. Ustalmy dowolnie łańcuch $\mathcal{L}$ w $\mathcal{U}$. Zbiór $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{L}} Z$ jest również układem f-ortonormalnym zawierającym A, (więc należy w szczególności do $\mathcal{U}$) oraz ogranicza z góry łańcuch. Założenia lematu Kuratowskiego-Zorna są więc spełnione, zatem istnieje element maksymalny $M \in \mathcal{U}$. Wystarczy jeszcze wykazać, że M jest zbiorem nieskończonym. Jeśli przyjmiemy dla dowodu nie wprost, że M jest skończony, to wtedy $\dim M^{\perp} > \dim \mathrm{Lin} M$. Stosując twierdzenie 1.30 otrzymujemy pewien wektor $a \in X$ taki, że zbiór $M \cup \{a\}$ jest istotnie większym układem f-ortonormalnym. Otrzymana sprzeczność z maksymalnością zbioru M kończy dowód. ■

1.4 Aproksymowanie operatorów injektywnych

Główny narzędziem, które będziemy stosować w tym podrozdziale, jest twierdzenie 1.24 o bazie względem operatora, mówiące o istnieniu, dla zadanego operatora f, układu f-ortonormalnego będącego bazą. Wykażemy, że operatory różnowartościowe można przybliżać liniowymi podobieństwami. Mianowicie, będziemy starali się odpowiedzieć na pytanie, w jakiej odległości od danego różnowartościowego operatora znajduje się liniowe podobieństwo. Wyniki tego podrozdziału będą stosowane w dalszej części pracy.

Twierdzenie 1.37 *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unitarnymi i niech* $\dim X = n$. *Załóżmy także, że $f \colon X \to Y$ jest injektywnym odwzorowaniem liniowym. Wówczas istnieje liniowe podobieństwo $h \colon X \to Y$ takie, że*

$$\|f - h\| = \tfrac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right)$$

oraz $\|h\| = \frac{1}{2}\left([f] + \|f\|\right)$.

Dowód: Z twierdzenia 1.24 wynika, że istnieje baza przestrzeni X złożona z jednostkowych wektorów $x_1, \ldots, x_n \in X$ takich, że $x_j \perp x_k$ oraz $fx_j \perp fx_k$ dla $j \neq k$. Niech $\beta := \frac{[f]+\|f\|}{2}$. Definiujemy teraz liniowe odwzorowanie $h \colon X \to Y$ na powyższej bazie wzorem

$$hx_k := \beta\frac{fx_k}{\|fx_k\|} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Z uwagi na ortogonalność powyższych wektorów, operator h jest podobieństwem. Istotnie, dla dowolnego wektora $w = \sum_{p=1}^{n} \gamma_p x_p$ dostajemy równości

$$\|hw\|^2 = \left\|h\left(\sum_{p=1}^{n}\gamma_p x_p\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{p=1}^{n}\gamma_p hx_p\right\|^2 = \left\|\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\beta\frac{fx_p}{\|fx_p\|}\right\|^2 = |\beta|^2\sum_{p=1}^{n}|\gamma_p|^2\cdot\left\|\frac{fx_p}{\|fx_p\|}\right\|^2 =$$

$$= |\beta|^2\sum_{p=1}^{n}|\gamma_p|^2 = |\beta|^2\sum_{p=1}^{n}|\gamma_p|^2\cdot\|x_p\|^2 = |\beta|^2\left\|\sum_{p=1}^{n}\gamma_p x_p\right\|^2 = |\beta|^2\cdot\|w\|^2,$$

a zatem h jest podobieństwem oraz $\|h\| = \beta = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$.

Ustalmy teraz dowolnie wektor $x = \sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p$ ze sfery jednostkowej, tzn. $\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2 = 1$. Oczywiście dla dowolnego $p = 1, 2, \ldots, n$ mamy $[f] \leqslant \|fx_p\| \leqslant \|f\|$, zatem odejmując liczbę $\frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}[f]$ dostajemy $[f] - \frac{1}{2}\|f\| - \frac{1}{2}[f] \leqslant \|fx_p\| - \frac{1}{2}\|f\| - \frac{1}{2}[f] \leqslant \|f\| - \frac{1}{2}\|f\| - \frac{1}{2}[f]$, a stąd mamy również $-\frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}[f] \leqslant \|fx_p\| - \beta \leqslant \frac{1}{2}\|f\| - \frac{1}{2}[f]$. Ostatecznie uzyskaliśmy nierówność

$$\left|\, \|fx_p\| - \beta \,\right| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\| - [f]). \tag{1.17}$$

Pamiętając, że $fx_1, \ldots, fx_n$ są parami ortogonalne, możemy wyprowadzić oszacowanie:

$$\|fx - hx\|^2 = \left\|f\left(\sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p\right) - h\left(\sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p fx_p - \sum_{p=1}^{n}\alpha_p hx_p\right\|^2 =$$

$$= \left\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p fx_p - \sum_{p=1}^{n}\alpha_p\beta\frac{fx_p}{\|fx_p\|}\right\|^2 = \left\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\left(1 - \frac{\beta}{\|fx_p\|}\right)fx_p\right\|^2 =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2\left|1 - \frac{\beta}{\|fx_p\|}\right|^2\|fx_p\|^2 = \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2\left|\frac{\|fx_p\|}{\|fx_p\|} - \frac{\beta}{\|fx_p\|}\right|^2\|fx_p\|^2 =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2\frac{\left|\, \|fx_p\| - \beta \,\right|^2}{\|fx_p\|^2}\|fx_p\|^2 = \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2\cdot\left|\, \|fx_p\| - \beta \,\right|^2 \overset{(1.17)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2\left(\frac{1}{2}(\|f\| - [f])\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\|f\| - [f])\right)^2\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(\|f\| - [f])\right)^2,$$

zatem $\|f - h\| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. Ponadto, jest również

$$\|f - h\| \geqslant \|f\| - \|h\| = \|f\| - \beta = \tfrac{1}{2}(\|f\| - [f]).$$

To kończy dowód. ■

Z powyższego wyniku widać, że im bardziej operator przypomina podobieństwo (tzn. im mniejsza jest różnica $\|f\| - [f]$), tym bliżej znajduje się jakiegoś liniowego podobieństwa.

Pojawia się naturalne pytanie: czy w powyższym wyniku istotne jest założenie skończonego wymiaru w dziedzinie? Poniżej pokażemy, że rezultat z ostatniego twierdzenia możemy otrzymać dla zespolonych przestrzeni Hilberta dowolnego wymiaru.

Twierdzenie 1.38 *Załóżmy, że H jest zespoloną przestrzenią Hilberta i niech $f\colon H \to H$ będzie ciągłym operatorem injektywnym ograniczonym z dołu (tzn. $0 < [f]$). Wówczas istnieje liniowe podobieństwo $h\colon H \to H$ takie, że*

$$\|f-h\| = \frac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right) \tag{1.18}$$

oraz $\|h\| = \frac{1}{2}\left([f] + \|f\|\right)$.

Dowód: Niech $f = UP$ będzie rozkładem polarnym operatora f, gdzie $U\colon H \to H$ jest częściową izometrią, a $P\colon H \to H$ jest operatorem nieujemnym. Stąd P jest samosprzężony (zob. twierdzenie 1.14). Ponadto, twierdzenie 1.15 dostarcza $\ker U = \ker f$, więc U jest izometrią, bo $\ker f = \{0\}$.

Pokażemy teraz, że P jest odwracalny. Ustalmy $k \in \ker P$. Wtedy $0 = \|Pk\| = \|UPk\| = \|fk\|$, zatem $fk = 0$, więc $k = 0$. Wykazano w ten sposób równość $\ker P = \{0\}$, czyli P jest injekcją. Następnie mamy $H = \{0\}^{\perp} = (\ker P)^{\perp} = (\ker P^{*})^{\perp} \overset{10}{=} \overline{P(H)}$. Do zakończenia dowodu surjektywności, wystarczy pokazać, że $P(H)$ jest domkniętą podprzestrzenią, tzn. $\overline{P(H)} = P(H)$. Skoro U jest izometrią, to łatwo można pokazać, że $[f] = [P]$. Stąd i z założeń dostajemy nierówność $0 < [P]$. Na mocy twierdzenia 1.4 stwierdzamy, że $P(H)$ jest przestrzenią zupełną, a więc $P(H)$ jest domkniętą podprzestrzenią.

Niech $\beta := \frac{[f]+\|f\|}{2}$. Definiujemy teraz operator $h\colon H \to H$ wzorem $h := \beta U$. Zauważmy, że $\|P\| = \|f\|$, $[P] = [f]$ ponieważ U jest izometrią. Ponadto $\sigma(P) \subset [0, +\infty)$, gdyż P nieujemny (zob. lemat 1.14). Skoro P jest odwracalny, to z lematów 1.9 oraz 1.10 dostajemy

$$\sigma(P - \beta I) = -\beta + \sigma(P) \subset -\beta + \left[\,[f], \|f\|\,\right]. \tag{1.19}$$

Operator $P - \beta I$ jest również samosprzężony. Z ostatnich uwag otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|f-h\| &= \|UP - \beta U\| = \|P - \beta I\| \overset{(1.1)}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(P-\beta I)\} \overset{(1.19)}{\leqslant} \\ &\leqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in -\beta + \left[\,[f], \|f\|\,\right]\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \left[\,[f]-\beta, \|f\|-\beta\,\right]\} = \\ &= \frac{1}{2}(\|f\| - [f]),\end{aligned}$$

więc $\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right)$. Z drugiej strony otrzymujemy również

$$\|f-h\| \geqslant \|f\| - \|h\| = \|f\| - \beta = \tfrac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right),$$

co daje nam równość (1.18). ■

Jako wniosek z twierdzenia 1.38, dostajemy ogólniejszy wynik.

Twierdzenie 1.39 *Załóżmy, że H jest zespoloną przestrzenią Hilberta, oraz Y jest zespoloną przestrzenią unitarną. Niech $f\colon H \to Y$ będzie, ciągłym operatorem ograniczonym od dołu. Wówczas istnieje liniowe podobieństwo $h\colon H \to Y$ takie, że*

$$\|f-h\| = \frac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right). \tag{1.20}$$

oraz $\|h\| = \frac{1}{2}\left([f] + \|f\|\right)$.

[10] Dla dowolnego $T \in B(H)$ zachodzi równość $\ker T^{*} = \overline{T(H)}^{\perp}$, stąd $(\ker T^{*})^{\perp} = \overline{T(H)}$ (zob. [15, str.135]).

Dowód: Uzasadnimy najpierw, że $f(H)$ jest przestrzenią Hilberta. Wystarczy pokazać, że $f(H)$ jest zupełną podprzestrzenią. Z założenia jest $0 < [f]$, zatem zupełność podprzestrzeni $f(H)$ wynika z twierdzenia 1.4.

Operator $f\colon H \to f(H)$ jest ciągły, surjektywny, ograniczony z dołu, więc jest injektywny, a w konsekwencji odwracalny. Wiemy, że H oraz $f(H)$ są przestrzeniami zupełnymi, zatem $f^{-1}\colon f(H) \to H$ jest również ciągły, na mocy twierdzenia o operatorze odwrotnym. Stąd $f\colon H \to f(H)$ jest liniowym homeomorfizmem, czyli w szczególności H oraz $f(H)$ są izometrycznie izomorficznymi[11] przestrzeniami Hilberta. Zatem istnieje surjektywna liniowa izometria $\varphi\colon H \to f(H)$. Stosując twierdzenie 1.38 do operatora $\varphi^{-1} \circ f\colon H \to H$ otrzymujemy liniowe podobieństwo $\widehat{h}\colon H \to H$, które spełnia równości $\left\|\varphi^{-1}\circ f - \widehat{h}\right\| = \frac{1}{2}\left(\|\varphi^{-1}\circ f\| - [\varphi^{-1}\circ f]\right)$ oraz $\left\|\widehat{h}\right\| = \frac{1}{2}\left([\varphi^{-1}\circ f] + \|\varphi^{-1}\circ f\|\right)$. Pozostaje wykazać, że odwzorowanie $h\colon H \to Y$, dane wzorem $h := \varphi \circ \widehat{h}$ spełnia tezę. Istotnie,

$$\begin{aligned}\|f-h\| &= \left\|\varphi\circ\varphi^{-1}\circ f - \varphi\circ\widehat{h}\right\| = \left\|\varphi^{-1}\circ f - \widehat{h}\right\| = \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\varphi^{-1}\circ f\| - [\varphi^{-1}\circ f]\right) = \frac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right)\end{aligned}$$

oraz $\|h\| = \left\|\varphi\circ\widehat{h}\right\| = \left\|\widehat{h}\right\| = \frac{1}{2}\left([\varphi^{-1}\circ f] + \|\varphi^{-1}\circ f\|\right) = \frac{1}{2}\left([f] + \|f\|\right)$. ■

Warto w tym miejscu nadmienić, że powyższe aproksymowanie w (1.20) jest najlepsze; niekoniecznie jedyne. Dla danego operatora f, ograniczonego jednocześnie z dołu i z góry, nie jest możliwe wskazanie liniowego podobieństwa bliżej niż jest to wykonane w (1.20). Istotnie, zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.40 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest ciągłym operatorem liniowym spełniającym $0 < [f] < \|f\|$ oraz niech $h\colon X \to Y$ będzie dowolnym liniowym podobieństwem. Wówczas*

(a) *jeśli $\|h\| = \beta := \frac{1}{2}(\|f\| + [f])$, to wtedy $\|f-h\| \geqslant \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$;*
(b) *jeśli $\|h\| \neq \beta := \frac{1}{2}(\|f\| + [f])$, to wtedy $\|f-h\| > \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$.*

Dowód: Zauważmy, że $\|f-h\| \geqslant \|f\| - \|h\| = \|f\| - \beta = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$, co dowodzi podpunktu (a). Aby wykazać (b), załóżmy na przykład, że $\|h\| > \beta$. Istnieje ciąg $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ ze sfery jednostkowej $S(X)$, taki, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\|fx_n\| = [f]$. Stąd $\|f-h\| \geqslant \|fx_n - hx_n\| \geqslant \left|\,\|fx_n\| - \|hx_n\|\,\right| = \left|\,\|fx_n\| - \|h\|\,\right|$. Rozważając $n \to +\infty$ dostajemy $\|f-h\| \geqslant \left|\,[f] - \|h\|\,\right| > \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. Przypadek $\|h\| < \beta$ uzasadniamy podobnie. ■

Poniższy przykład ukazuje brak jednoznaczności najlepszej aproksymacji.

Przykład 1.41 Rozważmy w $\mathbb{R}^4$ standardowy iloczyn skalarny. Dla wygody w dalszym zapisie przestrzeń $\mathbb{R}^4$ będziemy interpretowali jako $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Dla ustalonego $\alpha \in (0,1)$ *i* $\beta := \frac{1}{2}(\alpha+1)$ zdefiniujmy operator $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ przez

$$f(x,y,z) := (x, \alpha y, \beta z) \quad \text{dla} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}.$$

[11] Przestrzenie H oraz $f(H)$ mają ten sam wymiar Hilberta (oznaczany zwykle $\dim_{\mathcal{H}}$). Istotnie, skoro f, f^{-1} są operatorami ciągłymi, to $\dim_{\mathcal{H}} H \geqslant \dim_{\mathcal{H}} f(H) \geqslant \dim_{\mathcal{H}} f^{-1}(f(H)) = \dim_{\mathcal{H}} H$, a zatem pokazano, że $\dim_{\mathcal{H}} H = \dim_{\mathcal{H}} f(H)$. Stąd moc bazy ortonormalnej w H jest taka sama jak moc bazy ortonormalnej w $f(H)$. Odwzorowanie liniowe przenoszące pierwszą bazę na drugą musi być izometrią.

Ustalmy wektor $(x, y, z) \in S\left(\mathbb{R}^4\right)$, czyli $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Wówczas

$$\alpha^2 = \alpha^2|x|^2 + \alpha^2|y|^2 + \alpha^2|z|^2 \leqslant |x|^2 + \alpha^2|y|^2 + \beta^2|z|^2 = \|(x, \alpha y, \beta z)\|^2 = \|f(x, y, z)\|^2$$

oraz $\|f(0, 1, 0)\| = \alpha$. Zatem $[f] = \alpha$. Z drugiej strony

$$\|f(x, y, z)\|^2 = |x|^2 + \alpha^2|y|^2 + \beta^2|z|^2 \leqslant |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$$

oraz $\|f(1, 0, 0)\| = 1$, a więc $\|f\| = 1$, a stąd $\beta = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$. Ustalmy teraz liczbę $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ na tyle małą, żeby $|\beta|\cdot|1 - e^{i\eta}| \leqslant |1 - \beta|$. Ustalmy następnie dowolnie $\vartheta \in (0, \eta)$. Łatwo widać, że także

$$|\beta|\cdot|1 - e^{i\vartheta}| \leqslant |1 - \beta| = |\alpha - \beta|. \tag{1.21}$$

Pokażemy, że operator $h_\vartheta \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, określony wzorem

$$h_\vartheta(x, y, z) := \beta \cdot \left(x, y, e^{i\vartheta} z\right) \quad \text{dla} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

jest podobieństwem. Ustalmy wektor (x, y, z) taki aby $\|(x, y, z)\| = 1$, tzn. $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Wtedy $\|h_\vartheta(x, y, z)\|^2 = \left\|\beta\cdot\left(x, y, e^{i\vartheta}z\right)\right\|^2 = \beta^2\left(|x|^2 + |y|^2 + \left|e^{i\vartheta}\right|^2|z|^2\right) = \beta^2$. Aby obliczyć odległość f od h_ϑ zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\|f(x, y, z) - h_\vartheta(x, y, z)\|^2 &= \left\|\left((1 - \beta)x, (\alpha - \beta)y, \beta(1 - e^{i\vartheta})z\right)\right\|^2 = \\
&= |1 - \beta|^2 \cdot |x|^2 + |\alpha - \beta|^2 \cdot |y|^2 + |\beta|^2 \cdot |1 - e^{i\vartheta}|^2 \cdot |z|^2 \overset{(1.21)}{\leqslant} \\
&\leqslant |1 - \beta|^2 \cdot |x|^2 + |1 - \beta|^2 \cdot |y|^2 + |1 - \beta|^2 \cdot |z|^2 = \\
&= |1 - \beta|^2\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right) = |1 - \beta|^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - \alpha)\right)^2 = \\
&= \left(\frac{1}{2}(\|f\| - [f])\right)^2.
\end{aligned}$$

Skoro (x, y, z) był dowolnie wybrany ze sfery $S\left(\mathbb{R}^4\right)$, to $\|f - h_\vartheta\| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. Stąd widać, że liniowych podobieństw realizujących najlepszą aproksymację, jest nieprzeliczalnie wiele, gdyż każde h_η, dla $\eta \in (0, \vartheta)$, jest oddalone od f o nie więcej niż $\frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. Powołując się na twierdzenie 1.40, możemy nawet powiedzieć, że każdy operator h_η jest oddalony od f dokładnie o $\frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ i w ten sposób jest najlepszym przybliżeniem.

Identyczne rozważania do przeprowadzonych przed chwilą, pozwalają rozpatrzyć przypadek operatorów określonych na przestrzeni zespolonej. Rozważmy $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ oraz operatory $f, h_\vartheta \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ określone dla $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tymi samymi wzorami jak powyżej. Wszystkie rachunki można bardzo łatwo powtórzyć w ten sam sposób, aby przekonać się, że $\|f - h_\vartheta\| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. Ostatecznie otrzymujemy ponownie brak jednoznaczności najlepszej aproksymacji.

Spróbujemy teraz rozwiązać następny problem związany ze aproksymowaniem: czy operator $f \in B(H)$, ograniczony z dołu, można aproksymować[12] liniowym podobieństwem $h \in B(H)$, które dodatkowo jest odwracalne? Okazuje się, że jeśli h jest najlepszą aproksymacją operatora f (tzn. spełnia równość 1.18), to odwracalność h zależy od odwracalności f i odwrotnie. Istotnie, zachodzi następujące twierdzenie.

[12]Mamy tu na myśli aproksymowanie w sensie (1.18).

Twierdzenie 1.42 *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta oraz niech $f \in B(H)$ będzie ograniczony z dołu. Załóżmy ponadto, że $h \in B(H)$ jest liniowym podobieństwem najlepiej przybliżającym operator f, tzn. spełniającym*[13] $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$. *Wówczas:*

(a) *jeśli h jest odwracalny, to f jest odwracalny;*

(b) *jeśli f jest odwracalny i spełnia $\frac{1}{3}\|f\| < [f]$, to h jest odwracalny.*

Dowód: Jeżeli f jest liniowym podobieństwem, to $f = h$, więc teza zachodzi. Rozważmy zatem, sytuację gdy f nie jest podobieństwem, czyli $0 < [f] < \|f\|$. Z twierdzeń 1.38, 1.40 wynika, że norma podobieństwa h, najlepiej aproksymującego operator f, wynosi $\|h\| = \frac{1}{2}(\|f\| + [f])$.

Załóżmy najpierw, że h jest odwracalny. Z równości $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ dostajemy

$$\left\| \frac{f}{\|h\|} - \frac{h}{\|h\|} \right\| = \frac{1}{2}\left(\frac{\|f\|}{\|h\|} - \frac{[f]}{\|h\|} \right). \tag{1.22}$$

Operator $S := \frac{h}{\|h\|}$ jest również odwracalny i jest izometrią, zatem S^{-1} też jest izometrią. Stąd oraz z równości (1.22) wnosimy, że

$$\left\| S^{-1}\frac{f}{\|h\|} - I \right\| = \left\| S^{-1}\frac{f}{\|h\|} - S^{-1}S \right\| = \left\| S^{-1}\left(\frac{f}{\|h\|} - S\right) \right\| = \left\| \frac{f}{\|h\|} - S \right\| =$$
$$= \left\| \frac{f}{\|h\|} - \frac{h}{\|h\|} \right\| = \frac{1}{2}\left(\frac{\|f\|}{\|h\|} - \frac{[f]}{\|h\|} \right) = \frac{\|f\| - [f]}{\|f\| + [f]} < 1.$$

Wykazaliśmy nierówność $\left\| I - S^{-1}\frac{f}{\|h\|} \right\| < 1$. Korzystając z twierdzenia 1.6 stwierdzamy, że $S^{-1}\frac{f}{\|h\|} = I - \left(I - S^{-1}\frac{f}{\|h\|}\right) \in U(B(H))$. Skoro $S^{-1}\frac{f}{\|h\|}$ jest odwracalny, to f również.

Aby udowodnić (b) przyjmijmy, że f jest odwracalny oraz $\frac{1}{3}\|f\| < [f]$. Ustalmy dowolnie wektor $x \in S(H)$. Wówczas

$$[f]\cdot\|x-(f^{-1}\circ h)x\| \leqslant \|f(x-(f^{-1}\circ h)x)\| = \|fx - hx\| \leqslant \|f-h\| = \tfrac{1}{2}(\|f\| - [f]).$$

Przechodząc z x do supremum po sferze jednostkowej po lewej stronie nierówności, dostajemy $\|I - f^{-1}\circ h\| \leqslant \frac{\|f\|-[f]}{2[f]}$. Skoro $\frac{1}{3}\|f\| < [f]$, to $\|I - f^{-1}\circ h\| < 1$. Na mocy twierdzenia 1.6 mamy $f^{-1}\circ h = I - (I - f^{-1}\circ h) \in U(B(H))$. Ponieważ $f^{-1}\circ h$ jest odwracalny, to h też musi być odwracalny. ■

Na koniec podrozdziału przedstawimy warunek konieczny na to, aby podobieństwo liniowe było najlepszą aproksymacją danego injektywnego operatora. Ponadto, twierdzenie to ukazuje rozmieszczenie tych operatorów względem siebie w przestrzeni $B(X;Y)$.

W przestrzeni unormowanej $(W, \|\cdot\|)$ definiujemy relację *B-ortogonalności* wzorem $x \perp_B y :\Leftrightarrow \forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\ \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$. W rozdziale 3. omówimy to pojęcie bardziej szczegółowo.

Twierdzenie 1.43 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi. Załóżmy, że operator $f \in B(X;Y)$ spełnia nierówność $0 < [f]$. Jeżeli $h \in B(X;Y)$ jest podobieństwem najlepiej aproksymującym operator f, to wówczas $(f-h)\perp_B h$.*

---

[13] por. twierdzenia 1.38, 1.40.

Dowód: Ustalmy $\lambda \in \mathbb{K}$. Operator λh jest również podobieństwem, ale h jest najlepszym przybliżeniem, więc $\|f-h\| \leqslant \|f-\lambda h\| = \|f-h+(1-\lambda)h\|$. Skoro λ było wybrane dowolnie, to z powyższego otrzymujemy

$$\forall_{\gamma\in\mathbb{K}}\ \|f-h\| \leqslant \|f-h+\gamma h\|,$$

a zatem $(f-h)\perp_{\mathrm{B}} h$, gdzie oczywiście $\perp_{\mathrm{B}}$ jest B-ortogonalnością w $B(X;Y)$. ■

1.5 Rozkład polarny operatora

Przystąpimy do zaprezentowania następnego zastosowania twierdzenia o istnieniu bazy względem operatora. W książce [31] można znaleźć poniższe twierdzenie (wraz z dowodem) o rozkładzie polarnym operatora. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym.

Twierdzenie 1.44 [31, str.138,139] *Każdy nieosobliwy*[14] *operator $A\colon V \to V$ można przedstawić w postaci*

$$T = PU = UP_1,$$

gdzie operatory P, P_1 są dodatnio określone[15]*, a U jest izometrią liniową.*

Niżej przedstawimy nowy[16] dowód tego faktu. Mianowicie, stosując twierdzenie 1.24 o istnieniu bazy względem operatora, wykażemy rozkład polarny.

Twierdzenie 1.45 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi i niech* $\dim X = n$. *Każdy injektywny operator $f\colon X \to Y$ można przedstawić w postaci*

$$f = BU = UA,$$

gdzie operatory $A\colon X \to X$, $B\colon f(X) \to f(X)$ są dodatnio określone, a $U\colon X \to f(X)$ jest izometrią liniową.

Dowód: Z twierdzenia 1.24 otrzymujemy f-ortonormalną bazę $x_1, \dots, x_n \in X$. Stąd wektory $y_k := \|fx_k\|x_k \in X$ dla $k = 1, \dots, n$ stanowią bazę ortogonalną, natomiast wektory $w_k := \frac{fx_k}{\|fx_k\|} \in Y$ dla $k = 1, \dots, n$ są bazą ortonormalną w przestrzeni $f(X)$. Następnie definiujemy operatory liniowe na odpowiednich bazach: $A\colon X \to X$, $Ax_k := y_k$, $B\colon f(X) \to f(X)$, $Bw_k := \|fx_k\|w_k$ oraz $U\colon X \to f(X)$, $Ux_k := w_k$. Dla dowolnego wektora x_k z bazy otrzymujemy

$$UAx_k = Uy_k = U(\|fx_k\|x_k) = \|fx_k\|Ux_k = \|fx_k\|w_k = \|fx_k\|\frac{fx_k}{\|fx_k\|} = fx_k,$$

zatem $UA = f$. Zauważmy, że U jest izometrią, ponieważ obrazem bazy ortonormalnej jest układ ortonormalny. Wykażemy teraz, że A jest dodatnio określony. Ustalmy wektor

[14] Operator A nazywamy *nieosobliwym*, gdy $\det A \neq 0$, lub równoważnie, gdy A jest bijektywny.
[15] zob. definicję 1.12.
[16] tzn. inny niż ten zawarty w [31]

$x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in X \setminus \{0\}$. Wtedy

$$\langle Ax|x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| \overline{\alpha_j} \langle x_k|x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \|f x_k\| > 0.$$

Następnie pokażemy $A^* = A$. Dla drugiego ustalonego wektora $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j \in X$ mamy

$$\langle Ax|y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| \overline{\beta_j} \langle x_k|x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| \overline{\beta_k} \langle x_k|x_k\rangle$$

oraz

$$\langle x|Ay\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j A x_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \|f x_j\| x_j \right\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \|f x_j\| \overline{\beta_j} \langle x_k|x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|f x_k\| \overline{\beta_k} \langle x_k|x_k\rangle,$$

a więc $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$. Gdy $x = 0$, to ostatnia równość również jest prawdziwa. Podobnie wykazujemy równość $BU = f$ oraz dodatnie określenie operatora B. ■

Podstawiając w powyższym twierdzeniu X w miejsce Y otrzymujemy jako wniosek twierdzenie 1.44. Okazuje się jednak, że zachodzi również „efekt odwrotny", tzn. stosując twierdzenie 1.44 o rozkładzie polarnym, można udowodnić twierdzenie o bazie operatora. *Alternatywny dowód twierdzenia 1.24:* Niech $f\colon X \to Y$ będzie operatorem injektywnym. Istnieje izometria liniowa $S\colon f(X) \to X$. Operator $S \circ f\colon X \to X$ spełnia założenia twierdzenia 1.44, zatem $S \circ f = UP_1$. Operator P_1, jako dodatnio określony, ma n unormowanych wektorów własnych $w_1, \dots, w_n$, parami ortogonalnych[17]. Skoro $f = S^{-1}UP_1$ oraz $S^{-1}U\colon X \to f(X)$ jest izometrią, to można łatwo pokazać, że wektory $fw_1, \dots, fw_n$ są również parami ortogonalne. Stąd układ $w_1, \dots, w_n$ jest bazą f-ortonormalną. ■

Rozważania w tym podrozdziale ukazują pewną „równoważność" twierdzenia 1.24 oraz twierdzenia 1.44. Mianowicie, mając wcześniej udowodnione jedno z nich, jako wniosek, możemy uzyskać drugie. Jak już wspominaliśmy wcześniej, dowód twierdzenia 1.44 można znaleźć w [31]. Natomiast, podrozdział 1.2 wraz z twierdzeniem 1.45 stanowią drugi dowód twierdzenia 1.44, w którym stosujemy inne metody dowodowe niż w książce [31].

[17] Zob. [31, str.136,137]

Rozdział 2

Operatory zachowujące ortogonalność w przestrzeniach unitarnych

W tym rozdziale omówimy odwzorowania liniowe, które zachowują (dokładnie, bądź w sposób przybliżony) relacje zdefiniowane przez iloczyn skalarny. Jako wnioski, otrzymamy liczne rezultaty nawiązujące do operatorów zachowujących (lub prawie zachowujących) ortogonalność. W ten sposób uzupełnimy i wzmocnimy niektóre wyniki z prac [30], [47]. Następnie podamy wyniki dotyczące stabilności. W ostatniej części rozdziału opiszemy strukturę zbioru operatorów prawie zachowujących ortogonalność i pokażemy, że ten zbiór jest zbiorem wszystkich operatorów jednocześnie ograniczonych z góry i z dołu.

Niech $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, $(Y, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ będą przestrzeniami unitarnymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest operatorem. Ustalmy także liczbę $\varepsilon \in [0, 1)$.

Definicja 2.1 Powiemy, że dwa wektory x, y są *ε-ortogonalne,* jeżeli $|\langle x|y\rangle| \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|$.

Definicja 2.2 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *zachowuje ortogonalność,* jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X}: \ x\perp y \ \Rightarrow \ fx\perp fy. \tag{2.1}$$

Definicja 2.3 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *ε-prawie zachowuje ortogonalność,* jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X}: \ x\perp y \ \Rightarrow \ fx\perp^{\varepsilon} fy. \tag{2.2}$$

Prace [11], [12], [47] dotyczą odwzorowań powyższego typu. W pracy [30] rozważane są operatory opisane poniższą definicją. Niech $\delta, \varepsilon \in [0, 1)$.

Definicja 2.4 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *(δ, ε)-zachowuje ortogonalność,* jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X}: \ x\perp^{\delta} y \ \Rightarrow \ fx\perp^{\varepsilon} fy. \tag{2.3}$$

W rozdziale tym rozwiniemy teorię powyższych operatorów. Mianowicie, dokonamy uogólnień przez rozważanie nowych relacji, „geometrycznie" podobnych do ortogonalności i będziemy rozważali operatory zachowujące te relacje (lub prawie zachowujące). W ten sposób otrzymamy ogólniejsze wyniki niż te, które zawarte są w pracach [30], [47].

2.1 Stabilność

Pojęcie stabilności, wprowadzone przez Ulama, ma bardzo długą historią i jest tematem bardzo rozległym. Problem stabilności jest różnie rozumiany. Stabilność pojawia się w równaniach różniczkowych, analizie funkcjonalnej i równaniach funkcyjnych. W każdej z tych dziedzin problem stabilności ma różne znaczenia, dlatego niezbędne jest aby omówić tutaj to co będziemy rozumieli w pracy pod pojęciami stabilności i aproksymacji.

Niech U, W będą unormowanymi przestrzeniami nad tym samym ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Rozważmy relacje $R_1 \subset U \times U$, $R_2 \subset W \times W$.

Definicja 2.5 Powiemy, że operator $f\colon U \to W$ *zachowuje*[1] *parę relacji* (R_1, R_2), jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y \in U} \quad xR_1y \;\Rightarrow\; fxR_2fy. \tag{2.4}$$

W przypadku gdy w dziedzinie i przeciwdziedzinie rozważamy te same ortogonalności $\perp$, wygodniejsze będzie używanie sformułowania, że operator zachowuje ortogonalność niż, że operator zachowuje parę relacji $(\perp, \perp)$.

Następnie dla każdego $\varepsilon \in [0,1)$ rozważmy relacje $R_2^\varepsilon \subset W \times W$ takie, że $R_2^0 = R_2$ oraz $R_2^{\varepsilon_a} \subset R_2^{\varepsilon_b}$ ilekroć $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$. Wtedy możemy rozważyć ogólniejsze operatory, które tylko w przybliżeniu zachowują daną parę relacji.

Definicja 2.6 Mówimy, że operator $f\colon U \to W$ *ε-prawie zachowuje*[2] *parę relacji* (R_1, R_2), jeśli spełnia następujący warunek

$$\forall_{x,y \in U} \quad xR_1y \;\Rightarrow\; fxR_2^\varepsilon fy. \tag{2.5}$$

W sytuacji kiedy w dziedzinie rozpatrujemy ortogonalność, a ε-ortogonalność w przeciwdziedzinie, dla wygody będziemy stosować sformułowanie, że operator ε-prawie zachowuje ortogonalność zamiast ε-prawie zachowuje parę relacji $(\perp, \perp)$. Następnie sprecyzujemy pojęcia stabilności oraz przybliżania (aproksymacji), które będą obowiązywały w tej pracy.

Definicja 2.7 Jeżeli istnieje stała $\varepsilon_o \in (0,1]$ oraz funkcja $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ (uniwersalna dla danej pary przestrzeni U, W) taka, że $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \delta(\varepsilon) = 0$ oraz mająca następującą własność: dla każdego operatora $f \in B(U; W)$ spełniającego (2.5) istnieje operator $h \in B(U; W)$ spełniający (2.4) taki, że

$$\|f - h\| \leqslant \delta(\varepsilon)\|f\|,$$

to wtedy powiemy, że dla pary przestrzeni (U, W) *zachodzi (jest) stabilność własności zachowywania pary relacji* (R_1, R_2). Mówimy wówczas, że operatory spełniające (2.5) można *przybliżać (aproksymować)* operatorami spełniającymi (2.4).

---

[1] Właściwie należałoby mówić o „przekształcaniu relacji R_1 na R_2". Użycie słowa „zachowuje" wynika z tego, że zazwyczaj relacje R_1 oraz R_2 są tego samego typu, z reguły tak samo zdefiniowane tylko w różnych zbiorach.

[2] Oczywiście ta definicja zależy od sposobu określenia relacji R_2^ε.

Oczywiście, jest sens rozważać problem stabilności wtedy gdy istnieje chociaż jeden operator spełniający (2.4), bo wówczas jest czym przybliżać, dlatego w pracy tej będziemy rozpatrywać tylko takie sytuacje. Podobnie jak wcześniej, jeśli badanymi relacjami są ortogonalności, to będziemy używać terminu: stabilność własności zachowywania ortogonalności (zamiast stabilność własności zachowywania pary relacji $(\perp, \perp)$).

Dla przykładu podamy pewne twierdzenie ukazujące problem stabilności dla konkretnych przestrzeni i relacji. Jeśli X, Y są przestrzeniami Hilberta, to wówczas dla pary (X, Y) zachodzi stabilność własności zachowywania ortogonalności w powyższym sensie. Na przykład w pracy [47] uzyskano poniższy rezultat.

Twierdzenie 2.8 [47, Theorem 2.3] *Niech X, Y będą rzeczywistymi lub zespolonymi przestrzeniami Hilberta. Dla każdego operatora $f\colon X \to Y$, ε-prawie zachowującego ortogonalność, istnieje operator $h\colon X \to Y$ zachowujący ortogonalność, który spełnia $\|f - h\| \leqslant \left(1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|$.*

W twierdzeniu tym wzór $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ określa funkcję $\delta\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, o której jest mowa w definicji stabilności.

2.2 Relacje związane z ortogonalnością i pojęciem kąta

Odwzorowanie liniowe, pomiędzy unitarnymi przestrzeniami X, Y, zachowujące ortogonalność możemy równoważnie opisać warunkiem

$$\forall_{x,y\in X}: \ \langle x|y\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \langle fx|fy\rangle = 0.$$

Powyższy warunek oznacza, że f zachowuje wartość zero iloczynu skalarnego. W pracy [13] rozważano ogólniejsze odwzorowania, takie które zachowują pewną zadaną wartość iloczynu skalarnego. Niech $c \in \mathbb{K}$. Uogólnieniem operatora zachowującego ortogonalność jest operator zachowujący wartość c iloczynu skalarnego, tzn. taki, który spełnia

$$\forall_{x,y\in X}: \ \langle x|y\rangle = c \ \Rightarrow \ \langle fx|fy\rangle = c. \tag{2.6}$$

Następnie można rozpatrywać odwzorowania, które ε-prawie zachowują daną wartość:

$$\forall_{x,y\in X}: \ \langle x|y\rangle = c \ \Rightarrow \ |\langle fx|fy\rangle - c| \leqslant \varepsilon. \tag{2.7}$$

We wspomnianej pracy jest wykazane (zob. [13, Theorem 5.1]), że operatory liniowe spełniające (2.7) można przybliżyć liniowymi izometriami, czyli takimi liniowymi odwzorowaniami, które spełniają (2.6).

W tym podrozdziale zaproponujemy inny sposób uogólnienia operatorów zachowujących ortogonalność. Powyżej relację ortogonalności zastąpiono pewną wartością iloczynu skalarnego. Teraz, zamiast ortogonalności (czyli kąta prostego), możemy rozważać jakiś inny, ustalony wcześniej kąt. Niech $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $c \in \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$. Zdefiniujmy relację

$$x \angle_c y \ :\Leftrightarrow \ \langle x|y\rangle = c\|x\|\cdot\|y\|. \tag{2.8}$$

Jeżeli rozważana przestrzeń X jest rzeczywista, a więc $c \in (-1, 1)$, to warunek po prawej stronie w (2.8) orzeka, że kąt pomiędzy wektorami x, y wynosi $\alpha = \arccos c$ (albo równoważnie, cosinus kąta pomiędzy tymi wektorami jest równy c).

Podobną relację, będącą odpowiednikiem kąta w rzeczywistej przestrzeni Hilberta H, zdefiniowano w pracy [32]. Dla $u, x, w \in H$ takich, że $u \neq x$, $w \neq x$, miarę kąta między odcinkami $[x, u]$, $[x, w]$ przyjęto w tamtej pracy jako liczbę

$$\angle u, x, w := \arccos\left(\frac{\|x-u\|^2+\|x-w\|^2-\|u-w\|^2}{2\|x-u\|\cdot\|x-w\|}\right). \tag{2.9}$$

Oba powyższe sposoby rozważania miary kąta (w przypadku rzeczywistym) są równoważne w następującym sensie.

Twierdzenie 2.9 *Dla dowolnych wektorów $u, x, w \in H$ takich, że $u \neq x$, $w \neq x$ zachodzi równoważność:* $c = \cos(\angle u, x, w) \;\Leftrightarrow\; (u-x)\angle_c(w-x)$.

Dowód: Z warunku (2.9) wynika, że

$$\begin{aligned}\cos(\angle u, x, w) &= \frac{\|x-u\|^2+\|x-w\|^2-\|u-w\|^2}{2\|x-u\|\cdot\|x-w\|} = \\ &= \frac{\|x\|^2-2\langle x|u\rangle+\|u\|^2+\|x\|^2-2\langle x|w\rangle+\|w\|^2-\|u\|^2+2\langle u|w\rangle-\|w\|^2}{2\|x-u\|\cdot\|x-w\|} = \\ &= \frac{\langle x|x\rangle-\langle x|u\rangle-\langle x|w\rangle+\langle u|w\rangle}{\|x-u\|\cdot\|x-w\|} = \\ &= \frac{\langle x-u|x-w\rangle}{\|x-u\|\cdot\|x-w\|},\end{aligned}$$

a stąd łatwo widać, że równoważność w tezie jest prawdziwa. ■

Wniosek 2.10 *Dla niezerowych wektorów u, w zachodzi:* $c = \cos(\angle u, 0, w) \;\Leftrightarrow\; u\angle_c w$.

Następnie przybliżoną ortogonalność (z liczbą $\varepsilon \in [0, 1)$) możemy w rozważaniach zastąpić następującą relacją:

$$x\angle_c^\varepsilon y \;:\Leftrightarrow\; |\,\langle x|y\rangle - c\|x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|.$$

Jeżeli znowu rozpatrzymy przestrzeń rzeczywistą, to podobnie jak przed chwilą, również relacja $\angle_c^\varepsilon$ będzie mieć stosowną interpretację geometryczną. Mianowicie, $x\angle_c^\varepsilon y$ oznacza z definicji, że miara kąta α pomiędzy wektorem x, a wektorem y spełnia nierówności $\arccos(c+\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \arccos(c-\varepsilon)$ (albo równoważnie, $c-\varepsilon \leqslant \cos\alpha \leqslant c+\varepsilon$).

Będziemy dodatkowo zakładali, że liczba ε jest niewielka, tzn. $\varepsilon < 1 - |c|$, aby dla żadnego niezerowego wektora x nie zachodziła relacja $x\angle_c^\varepsilon x$. Własność ta jest wówczas ogólniejszą wersją warunku $x \perp x \Rightarrow x = 0$. W definicji obu relacji $\angle_c, \angle_c^\varepsilon$ zadbano o to, aby w szczególnym przypadku, gdy $c = 0$, relacje zbiegały się z ortogonalnościami, czyli $\angle_0 = \perp$ oraz $\angle_0^\varepsilon = \perp^\varepsilon$. Ponadto, łatwo widać, że relacja $\angle_c^\varepsilon$ jest *dodatnio jednorodna*, tzn.:

$$\forall_{x,y\in X}\; \forall_{\alpha,\beta\in(0,+\infty)}:\; x\angle_c^\varepsilon y \;\Rightarrow\; \alpha x\angle_c^\varepsilon \beta y. \tag{2.10}$$

2.3 Operatory zachowujące relację $\angle_c$

Rozważania z początku rozdziału oraz z poprzedniego podrozdziału prowadzą do sformułowania definicji nowych klas przekształceń liniowych. Niech X, Y nadal oznaczają unitarne przestrzenie nad ciałem $\mathbb{K}$. Ustalmy liczbę $c \in \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$.

Definicja 2.11 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *zachowuje kąt* $\angle_c$, jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X} : \; x\angle_c y \;\Rightarrow\; fx\angle_c fy.$$

Łatwo można zauważyć, że powyższa definicja jest szczególnym przypadkiem definicji 2.5.

Pomimo, że nie jest zaznaczone nad którym ciałem liczbowym rozpatrujemy przestrzenie, to jednak zawsze będziemy stosowali sformułowanie, że operator zachowuje kąt $\angle_c$, zamiast sformułowania: operator zachowuje relację $\angle_c$. Następnie ustalmy $\varepsilon \in [0, 1 - |c|)$.

Definicja 2.12 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *ε-prawie zachowuje zachowuje kąt* $\angle_c$ jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X} : \; x\angle_c y \;\Rightarrow\; fx\angle_c^{\varepsilon} fy. \tag{2.11}$$

Zauważmy, że ta definicja jest szczególnym przypadkiem definicji 2.6. Wzorując się na pracy [30], możemy zdefiniować odwzorowania podobne do tych opisanych warunkami (2.3) lub (2.11). Ustalmy liczbę $\delta \in [0, 1 - |c|)$.

Definicja 2.13 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *(δ, ε)-zachowuje kąt* $\angle_c$, jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X} : \; x\angle_c^{\delta} y \;\Rightarrow\; fx\angle_c^{\varepsilon} fy. \tag{2.12}$$

Oczywiście, przyjmując $c = 0$ otrzymujemy z trzech powyższych definicji operatory opisane odpowiednio warunkami (2.1), (2.2) oraz (2.3).

Problem zachowywania przez odwzorowanie (niekoniecznie liniowe) kątów w przestrzeni euklidesowej był rozpatrywany w pracy [32]. W dalszej części podrozdziału porównamy tamte rezultaty z wynikami uzyskanymi przez autora niniejszej rozprawy.

W tym podrozdziale podamy charakteryzację powyższych operatorów, a w następnym omówimy zagadnienie stabilności, tzn. czy operator spełniający (2.12) bądź (2.11), można aproksymować takim, który dokładnie zachowuje dany kąt. W szczególności otrzymamy, jako wnioski, podobne rezultaty do tych z prac [11], [12], [47] oraz [30].

Uzasadnimy teraz, że zdefiniowane tu operatory w ogóle istnieją. Pokażemy, w szczególności, że „w pobliżu" liniowych izometrii znajdują się operatory spełniające (2.12). Przez X, Y oznaczamy jak zwykle przestrzenie unitarne.

Lemat 2.14 *Dla dowolnych wektorów a, b, c, d z przestrzeni unitarnej zachodzi równość* $\langle a|b\rangle - \langle c|d\rangle = \langle a - c|b - d\rangle + \langle a - c|d\rangle + \langle c|b - d\rangle$.

Dowód: Wystarczy prawą stronę równości przekształcić odpowiednio. ■

Lemat 2.15 *Dla dowolnej liczby* $0 \leqslant \alpha < 1$ *zachodzi nierówność* $1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1$.

Dowód: Łatwo widać, że $(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 = ((1-\alpha)(1+\alpha))^2 = (1-\alpha^2)^2 \leqslant 1$, a więc $(1-\alpha)^2 \leqslant \frac{1}{(1+\alpha)^2}$. Stąd oraz z faktu, że suma dodatniej liczby i jej odwrotności jest niemniejsza niż 2, otrzymujemy $2 \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)^2} + (1-\alpha)^2 \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2}$, a stąd dostajemy nierówność występującą w tezie. ■

Twierdzenie 2.16 *Niech $h\colon X \to Y$ będzie liniową izometrią i niech $|c| < 1$ oraz $\delta \in [0, 1-|c|)$. Załóżmy, że dla ustalonego $0 \leqslant \alpha < 1$, ciągły operator $f\colon X \to Y$ spełnia*

$$\|f - h\| \leqslant \alpha. \tag{2.13}$$

Wówczas f spełnia wszystkie poniższe warunki:

(a) $\forall_{x,y\in X}: \ x \perp y \ \Rightarrow \ fx \perp^{\varepsilon} fy$, *dla* $\varepsilon = \varepsilon(0,0,\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}$;

(b) $\forall_{x,y\in X}: \ x \perp^{\delta} y \ \Rightarrow \ fx \perp^{\varepsilon} fy$, *dla* $\varepsilon = \varepsilon(0,\delta,\alpha) = \frac{\delta+\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}$;

(c) $\forall_{x,y\in X}: \ x \angle_c y \ \Rightarrow \ fx \angle_c^{\varepsilon} fy$, *dla* $\varepsilon = \varepsilon(c,0,\alpha) = \frac{|c|\left(1-(1-\alpha)^2\right)+\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}$;

(d) $\forall_{x,y\in X}: \ x \angle_c^{\delta} y \ \Rightarrow \ fx \angle_c^{\varepsilon} fy$, *dla* $\varepsilon = \varepsilon(c,\delta,\alpha)$;

gdzie $\varepsilon := \varepsilon(c,\delta,\alpha) = \frac{\delta+|c|\left(1-(1-\alpha)^2\right)+\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}$ *(aby zapewnić*[3] $\varepsilon < 1-|c|$ *wystarczy rozważać* $\alpha \in [0, \alpha_o)$ *z niewielkim, odpowiednio*[4] *dobranym* α_o*).*

Dowód: Z warunku (2.13) otrzymujemy dla wszystkich $x \in X$ nierówności

$$\big|\, \|fx\| - \|x\| \,\big| = \big|\, \|fx\| - \|hx\| \,\big| \leqslant \|fx - hx\| \leqslant \alpha\|x\|.$$

czyli $\|x\| - \|fx\| \leqslant \alpha\|x\|$ oraz $\|fx\| - \|x\| \leqslant \alpha\|x\|$. Z tych nierówności dostajemy

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\|fx\| \quad \text{oraz} \quad \|fx\| \leqslant (1+\alpha)\|x\| \quad \text{dla} \quad x \in X. \tag{2.14}$$

Podstawiając $a = fx$, $b = fy$, $c = hx$, $d = hy$ w lemacie 2.14 mamy

$$\begin{aligned}
|\,\langle fx|fy\rangle - \langle x|y\rangle\,| &= |\,\langle fx|fy\rangle - \langle hx|hy\rangle\,| = \\
&= |\,\langle fx-hx|fy-hy\rangle + \langle fx-hx|hy\rangle + \langle hx|fy-hy\rangle\,| \leqslant \\
&\leqslant \|fx-hx\|\cdot\|fy-hy\| + \|fx-hx\|\cdot\|hy\| + \|hx\|\cdot\|fy-hy\| \overset{(2.13)}{\leqslant} \\
&\leqslant \alpha\|x\|\cdot\alpha\|y\| + \alpha\|x\|\cdot\|y\| + \|x\|\cdot\alpha\|y\|,
\end{aligned}$$

zatem otrzymaliśmy

$$|\,\langle fx|fy\rangle - \langle x|y\rangle\,| \leqslant \alpha\,(\alpha+2)\,\|x\|\cdot\|y\| \quad \text{dla} \quad x,y \in X. \tag{2.15}$$

Teraz pokażemy, że f spełnia warunek (d). Ustalmy $x, y \in X$ i załóżmy, że $x\angle_c^{\delta} y$, tzn.

$$|\,\langle x|y\rangle - c\|x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant \delta\|x\|\cdot\|y\|. \tag{2.16}$$

Pierwsza nierówność z (2.14) dostarcza

$$\|x\|\cdot\|y\| - \|fx\|\cdot\|fy\| \leqslant \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right)\|fx\|\cdot\|fy\|, \tag{2.17}$$

natomiast z drugiej wyprowadzamy

$$\|fx\|\cdot\|fy\| - \|x\|\cdot\|y\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)\|fx\|\cdot\|fy\|. \tag{2.18}$$

[3]Relację $\angle_c^{\varepsilon}$ rozważamy, tylko gdy $\varepsilon \in [0, 1-|c|)$.

[4]Istotnie, skoro $\delta \in [0, 1-|c|)$ oraz $\delta \leqslant \varepsilon(c,\delta,\alpha)$, to można łatwo zauważyć, że $\varepsilon(c,\delta,\alpha) \to \delta^+$, gdy $\alpha \to 0^+$. Stąd istnieje pewne $\alpha_o \in [0,1)$ takie, że $\varepsilon = \varepsilon(c,\delta,\alpha) < 1-|c|$ dla wszystkich $\alpha \in [0,\alpha_o)$.

Z lematu 2.15 i nierówności (2.17) oraz (2.18) mamy

$$\left| \, \|x\|\cdot\|y\| - \|fx\|\cdot\|fy\| \, \right| \leqslant \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right) \|fx\|\cdot\|fy\|. \tag{2.19}$$

Stosując najpierw nierówność trójkąta, później (2.15), (2.16), a następnie (2.19) i ostatecznie pierwszą nierówność z (2.14), dostajemy

$$\begin{aligned}
\left| \langle fx|fy\rangle - c\|fx\|\cdot\|fy\| \, \right| &\leqslant \left| \langle fx|fy\rangle - \langle x|y\rangle \right| + \left| \langle x|y\rangle - c\|x\|\cdot\|y\| \, \right| + \\
&+ \left| \, c\|x\|\cdot\|y\| - c\|fx\|\cdot\|fy\| \, \right| \leqslant \\
&\leqslant \alpha(\alpha+2)\|x\|\cdot\|y\| + \delta\|x\|\cdot\|y\| + \\
&+ |c|\left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right)\|fx\|\cdot\|fy\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}\|fx\|\cdot\|fy\| + \frac{\delta}{(1-\alpha)^2}\|fx\|\cdot\|fy\| + \\
&+ |c|\frac{1-(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}\|fx\|\cdot\|fy\| = \varepsilon(c,\delta,\alpha)\|fx\|\cdot\|fy\|,
\end{aligned}$$

więc $fx\angle_c^\varepsilon fy$ gdzie $\varepsilon = \varepsilon(c,\delta,\alpha) = \frac{\delta+|c|\left(1-(1-\alpha)^2\right)+\alpha(\alpha+2)}{(1-\alpha)^2}$.

Stąd f spełnia (a) z $\varepsilon = \varepsilon(0,0,\alpha)$, a także f spełnia (b) z $\varepsilon = \varepsilon(0,\delta,\alpha)$ i ostatecznie f spełnia (c) z $\varepsilon = \varepsilon(c,0,\alpha)$. ∎

Wyjaśnimy teraz, jaki jest sens geometryczny powyższego twierdzenia. Załóżmy, że unitarne przestrzenie X, Y są rzeczywiste, a następnie przez $\cos(x,y)$ oznaczmy cosinus kąta między wektorami $x, y \in X$. Wówczas możemy zauważyć, że odległość operatora f od izometrii h, wpływa na zmienianie przez f kąta między wektorami. Istotnie, jeśli f jest oddalone od h o nie więcej niż α oraz znamy wartość $\cos(x,y)$, to wtedy cosinus kąta między wektorami $fx, fy \in Y$ możemy oszacować[5] przez

$$\cos(x,y) - \varepsilon\left(\cos(x,y),0,\alpha\right) \leqslant \cos(fx,fy) \leqslant \cos(x,y) + \varepsilon\left(\cos(x,y),0,\alpha\right).$$

Omawiany problem zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład 2.17 Niech $\mathbb{R}^2$ oznacza przestrzeń euklidesową. Rozpatrzmy operator $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadany wzorem $f(x_1,x_2) := \left(x_2, \frac{9}{10}x_1\right)$. Załóżmy, że kąt β między danymi, niezerowymi wektorami $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2)$ wynosi $\beta = 60^o$. Jeżeli chcemy szybko wiedzieć jaki jest w przybliżeniu kąt między obrazami, tych wektorów (nie stosując przy tym długich obliczeń), to możemy zastosować twierdzenie 2.16. Wystarczy zauważyć, że odwzorowanie $h(x_1,x_2) := (x_2,x_1)$ jest liniową izometrią oraz $\|f-h\| \leqslant \frac{1}{10}$. Teraz należy podstawić $c := \cos(a,b) = \frac{1}{2}$ oraz $\alpha := \frac{1}{10}$, a następnie powołać się na warunek (c) z twierdzenia 2.16. Wówczas okazuje się, że $\cos(fa,fb) \approx \frac{1}{2} \pm \varepsilon\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{61}{162}$. Zatem jeśli kąt między wektorami x, y miał miarę 60^o, to kąt γ między obrazami fx, fy na pewno spełnia nierówność $28^o \leqslant \gamma \leqslant 83^o$.

Pokażemy teraz, że operatory (δ,ε)-zachowujące dany kąt znajdują się również blisko liniowych podobieństw.

[5] Należy podstawić $c = \cos(x,y)$ i zastosować warunek (c) z twierdzenia 2.16.

Twierdzenie 2.18 *Niech $h\colon X \to Y$ będzie liniowym podobieństwem i niech $|c| < 1$ oraz $\delta \in [0, 1 - |c|)$. Niech ponadto $0 \leqslant \alpha < 1$ będzie ustalone. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest operatorem spełniającym*

$$\|f - h\| \leqslant \alpha\|h\|.$$

Wówczas f spełnia te same warunki (a), (b), (c), (d) *z twierdzenia 2.16.*

Dowód: Oczywiście $\frac{h}{\|h\|}$ jest izometrią oraz prawdziwa jest nierówność $\left\|\frac{f}{\|h\|} - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \alpha$. Z twierdzenia 2.16 wynika, że $\frac{f}{\|h\|}$ spełnia warunki (a), (b), (c), (d), a więc f też musi je spełniać (ze względu na dodatnią jednorodność relacji, zob. (2.10)). ■

W dalszym ciągu opiszemy operatory (δ, ε)-zachowujące dany kąt. Udowodnimy wcześniej niezbędne lematy. Załóżmy, że $c \in \mathbb{K}$ jest daną liczbą taką, że $|c| < 1$

Lemat 2.19 *Niech $f \in L(X; Y)$ spełnia warunek*

$$\forall_{x,y \in X}: \ x\angle_c^\delta y \ \Rightarrow \ fx\angle_c^\varepsilon fy. \tag{2.20}$$

Wówczas f spełnia (2.20) *z dowolną inną liczbą $\widehat{c} \in \mathbb{K}$ taką, że $|c| = |\widehat{c}|$.*

Dowód: Dla $c = 0$ teza oczywiście zachodzi. Załóżmy, że $c \neq 0$. Ustalmy liczbę $\widehat{c} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ taką, że $|c| = |\widehat{c}|$. Następnie ustalmy $x, y \in X$ i załóżmy, że $x\angle_{\widehat{c}}^\delta y$, tzn. $|\,\langle x|y\rangle - \widehat{c}\|x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant \delta\|x\|\cdot\|y\|$. Istnieje liczba $\sigma \in \mathbb{K}$ taka, że $c = \sigma\widehat{c}$ oraz $|\sigma| = 1$ (wystarczy $\sigma := \frac{c}{\widehat{c}}$). Z nierówności

$$|\sigma|\cdot|\,\langle x|y\rangle - \widehat{c}\|x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant |\sigma|\cdot\delta\|x\|\cdot\|y\|$$

otrzymujemy

$$|\,\langle \sigma x|y\rangle - \sigma\widehat{c}\|x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant \delta\|\sigma x\|\cdot\|y\|.$$

Skoro $\sigma\widehat{c}\|x\| = c\|x\| = c\|\sigma x\|$ (ponieważ $\|x\| = \|\sigma x\|$), to

$$|\,\langle \sigma x|y\rangle - c\|\sigma x\|\cdot\|y\|\,| \leqslant \delta\|\sigma x\|\cdot\|y\|,$$

zatem $\sigma x\angle_c^\delta y$. Skoro f spełnia (2.20), to $\sigma fx\angle_c^\varepsilon fy$, czyli

$$|\,\langle \sigma fx|fy\rangle - c\|\sigma fx\|\cdot\|fy\|\,| \leqslant \varepsilon\|\sigma fx\|\cdot\|fy\|.$$

Skoro $c\|\sigma fx\| = c\|fx\| = \sigma\widehat{c}\|fx\|$, to

$$|\sigma\,\langle fx|fy\rangle - \sigma\widehat{c}\|fx\|\cdot\|fy\|\,| \leqslant \varepsilon\|\sigma fx\|\cdot\|fy\|,$$

a stąd

$$|\,\langle fx|fy\rangle - \widehat{c}\|fx\|\cdot\|fy\|\,| \leqslant \varepsilon\|fx\|\cdot\|fy\|,$$

więc ostatecznie $fx\angle_{\widehat{c}}^\varepsilon fy$. ■

Lemat 2.20 *Niech $f \in L(X; Y)$ spełnia $f \neq 0$ oraz*

$$\forall_{x,y \in X}: \ x\angle_c^\delta y \ \Rightarrow \ fx\angle_c^\varepsilon fy. \tag{2.21}$$

Załóżmy dodatkowo, że $\delta, \varepsilon < 1 - |c|$. Wówczas f jest injekcją.

Dowód: Na mocy lematu 2.19 możemy założyć, że $c \in \mathbb{R}$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że f nie jest injekcją, tzn. $\ker f \neq \{0\}$. Ustalmy $a \in (\ker f)^{\perp}$ oraz $k \in \ker f$ tak aby $\|a\| = \|k\| = 1$. Aby znaleźć takie dodatnie $\lambda \in \mathbb{R}$ żeby $(a+\lambda k)\angle_c(a-\lambda k)$, wystarczy rozwiązać równanie

$$\langle a+\lambda k|a-\lambda k\rangle = c\,\|a+\lambda k\|\cdot\|a-\lambda k\|$$

względem λ. Stąd $\|a\|^2 - \lambda^2\|k\|^2 = c\sqrt{\|a\|^2+\|\lambda k\|^2}\sqrt{\|a\|^2+\|-\lambda k\|^2}$, więc $1-\lambda^2 = c\,(1+\lambda^2)$. Zatem dla $\lambda := \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ otrzymujemy $(a+\lambda k)\angle_c(a-\lambda k)$, a więc w szczególności $(a+\lambda k)\angle_c^{\delta}(a-\lambda k)$. Skoro f spełnia (2.21), to $(fa+\lambda fk)\angle_c^{\varepsilon}(fa-\lambda fk)$, a zatem $fa\angle_c^{\varepsilon}fa$, bo $fk=0$. Stąd dostajemy $|\,\langle fa|fa\rangle - c\|fa\|\cdot\|fa\|\,| \leqslant \varepsilon\|fa\|\cdot\|fa\|$, czyli $\|fa\|^2\cdot|1-c| \leqslant \varepsilon\|fa\|^2$. Wiemy, że $\|fa\| \neq 0$, więc $|1-c| \leqslant \varepsilon$. Z tej nierówności otrzymujemy $1-|c| \leqslant \varepsilon$, co jest sprzeczne z założeniem. ∎

Twierdzenie 2.21 *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unitarnymi oraz $\dim X \geqslant 2$. Niech ponadto $|c| < 1$ oraz $\delta, \varepsilon \in [0, 1-|c|)$. Niech $f\colon X \to Y$ będzie niezerowym odwzorowaniem liniowym (δ,ε)-zachowującym kąt $\angle_c$, tzn. spełniającym warunek*

$$\forall_{x,y\in X}:\ x\angle_c^{\delta}y \ \Rightarrow\ fx\angle_c^{\varepsilon}fy.$$

Wówczas f jest ciągłe, injektywne, $\delta \leqslant \varepsilon$ oraz f spełnia dwa poniższe warunki:
(1) $\forall_{x,y\in S(X)}:\ \eta\|fx\| \leqslant \|fy\|$;
(2) $\eta\|f\| \leqslant [f]$;
gdzie $\eta = \eta(c,\delta,\varepsilon) = \sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}$.

Dowód: Zauważmy, że lemat 2.19 gwarantuje nam, że bez straty ogólności możemy rozważać $\widehat{c} := |c|$ zamiast c. Załóżmy najpierw, że $\dim X = n$. Wykażemy przy tym założeniu, że f spełnia (2). Z lematu 2.20 wiemy, że f jest injektywne. Wówczas stosując twierdzenie 1.24 otrzymujemy f-ortonormalną bazę $x_1,\dots,x_n \in X$ taką, że $x_1 \perp x_n$, $fx_1 \perp fx_n$ oraz $[f] = \|fx_1\|$, $\|f\| = \|fx_n\|$. Następnie możemy znaleźć dodatnią liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ spełniającą $\langle x_n+\lambda x_1|x_n-\lambda x_1\rangle - \widehat{c}\|x_n+\lambda x_1\|\cdot\|x_n-\lambda x_1\| = \delta\|x_n+\lambda x_1\|\cdot\|x_n-\lambda x_1\|$. Wystarczy zastosować podobną metodą jak w dowodzie poprzedniego lematu. Okazuje się, że dla $\lambda := \sqrt{\frac{1-(\widehat{c}+\delta)}{1+(\widehat{c}+\delta)}}$ powyższa równość jest prawdziwa, więc w szczególności $(x_n+\lambda x_1)\angle_{\widehat{c}}^{\delta}(x_n-\lambda x_1)$. Następnie z założenia o f dostajemy $(fx_n+\lambda fx_1)\angle_{\widehat{c}}^{\varepsilon}(fx_n-\lambda fx_1)$, a zatem

$$\begin{aligned}|\,\langle fx_n+\lambda fx_1|fx_n-\lambda fx_1\rangle - \widehat{c}\|fx_n+\lambda fx_1\|\cdot\|fx_n-\lambda fx_1\|\,| \leqslant\\ \leqslant \varepsilon\|fx_n+\lambda fx_1\|\cdot\|fx_n-\lambda fx_1\|.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$|\,\|fx_n\|^2 - \lambda^2\|fx_1\|^2 - \widehat{c}\,(\|fx_n\|^2+\lambda^2\|fx_1\|^2)\,| \leqslant \varepsilon\,(\|fx_n\|^2+\lambda^2\|fx_1\|^2).$$

Kładąc $[f] = \|fx_1\|$ oraz $\|f\| = \|fx_n\|$ do powyższej nierówności, dostaniemy

$$(1-\widehat{c})\|f\|^2 - (\lambda^2+\widehat{c}\lambda^2)\,[f]^2 \leqslant \varepsilon\|f\|^2 + \varepsilon\lambda^2[f]^2,$$

stąd

$$(1-\widehat{c}-\varepsilon)\|f\|^2 \leqslant \lambda^2(1+\widehat{c}+\varepsilon)[f]^2,$$

a w konsekwencji $\sqrt{\frac{1-(\hat{c}+\varepsilon)}{1+(\hat{c}+\varepsilon)}} \cdot \sqrt{\frac{1+(\hat{c}+\delta)}{1-(\hat{c}+\delta)}}\|f\| \leqslant [f]$. Wykazaliśmy, przy założeniu skończonego wymiaru dla dziedziny, że f spełnia (2), zatem z lematu 1.5 wynika, że spełnia też (1).

Załóżmy teraz, że X jest nieskończenie wymiarowa. Wykażemy, że f spełnia (1). Ustalmy dwa dowolne wektory $x, y \in X$ takie, że $\|x\| = \|y\| = 1$ i przyjmijmy najpierw, że są liniowo zależne. Wówczas nierówność z (1) jest spełniona.

Teraz niech $\|x\| = \|y\| = 1$ oraz niech x, y będą liniowo niezależne. Przestrzeń $\operatorname{Lin}\{x, y\}$ jest skończenie wymiarowa, więc twierdzenie 2.21, udowodnione przed chwilą w przypadku skończenie wymiarowym, możemy już zastosować do odwzorowania $f|_{\operatorname{Lin}\{x,y\}} \colon \operatorname{Lin}\{x, y\} \to Y$, ponieważ ono również (δ, ε)-zachowuje kąt $\angle_c$. Wówczas $f|_{\operatorname{Lin}\{x,y\}}$ spełnia (1) czyli $\eta\|fx\| \leqslant \|fy\|$. Wykazaliśmy w ten sposób, że f spełnia (1). Z lematu 1.5 wynika, że f jest ciągłe i spełnia także warunek (2).

Załóżmy nie wprost, że $\delta > \varepsilon$. Zdefiniujmy funkcję $\varphi \colon (0, 1 - |c|) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := \frac{1-|c|-t}{1+|c|+t}$. Wówczas $\varphi' < 0$ więc φ jest malejąca, stąd $\varphi(\delta) < \varphi(\varepsilon)$, a wtedy $1 < \sqrt{\varphi(\varepsilon)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varphi(\delta)}} = \eta$ co dawałoby $0 < \|f\| < \eta\|f\| \leqslant [f] \leqslant \|f\|$ i prowadziło do sprzeczności. ■

Z powyższego rezultatu dostajemy natychmiast, jako wnioski, poniższe twierdzenia. Przypominamy, że pierwsze z nich było już wcześniej otrzymane w pracach [11], [47]. Prezentowany w tym podrozdziale dowód[6] jest inny niż dowody we wspomnianych pracach.

Twierdzenie 2.22 [11, Theorem 2], [47, Lemma 2.2] *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi i załóżmy, że $f \in L(X; Y)$ jest niezerowe oraz spełnia warunek*

$$\forall_{x,y \in X} :\ x \perp y \ \Rightarrow\ fx \perp^{\varepsilon} fy.$$

Wówczas f jest ciągłe, injektywne oraz spełnia warunki:

(a) $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \leqslant [f]$;

(b) $\forall_{x \in X} :\ \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$.

Dowód: Wystarczy w twierdzeniu 2.21 podłożyć $c = 0$ oraz $\delta = 0$. Wtedy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \leqslant [f]$, a stąd dla każdego $x \in X$ otrzymujemy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \cdot \|x\| \leqslant [f] \cdot \|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$. ■

Bezpośrednio z twierdzenia 2.21 dostajemy również jako wniosek poniższe twierdzenie. Następnie porównamy je z wynikiem z pracy [32], w którym nie zakładamy liniowości.

Twierdzenie 2.23 *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unitarnymi oraz* $\dim X \geqslant 2$. *Niech ponadto $|c| < 1$ oraz $\varepsilon \in [0, 1 - |c|)$. Niech $f \colon X \to Y$ będzie niezerowym odwzorowaniem liniowym ε-prawie zachowującym kąt $\angle_c$, tzn. spełniającym warunek*

$$\forall_{x,y \in X} :\ x \angle_c y \ \Rightarrow\ fx \angle_c^{\varepsilon} fy.$$

Wówczas f jest ciągłe, injektywne oraz spełnia dwa poniższe warunki:

(1) $\forall_{x,y \in S(X)} :\ \eta\|fx\| \leqslant \|fy\|$;

(2) $\eta\|f\| \leqslant [f]$;

gdzie $\eta = \eta(c, 0, \varepsilon) = \sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}} \cdot \sqrt{\frac{1+|c|}{1-|c|}}$.

[6] Przez dowód twierdzenia 2.22 rozumiemy też wszystkie niezbędne, poprzedzające go lematy i twierdzenia pomocnicze.

Twierdzenie 2.24 [32, str. 593] *Niech H, K będą rzeczywistymi, skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta takimi, że* $\dim H = n \geqslant 2$, $\dim K = m \leqslant 2n$. *Załóżmy, że $\mathcal{V} \subset H$ jest niepusty i otwarty. Niech ponadto odwzorowanie $f\colon \mathcal{V} \to K$ spełnia następujący warunek: dla każdego punktu $x \in \mathcal{V}$ istnieje liczba $\alpha_x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz co najwyżej przeliczalny zbiór $\Omega_x \subset [0,\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ taki, że jeśli $\angle u, x, w = \alpha_x$ $(u, w \in \mathcal{V})$, to $f(u) \neq f(x) \neq f(w)$, $\angle f(u), f(x), f(w) \in \Omega_x$. Wówczas f jest podobieństwem.*

Uwaga 2.25 Ostatnie dwa rezultaty są tematycznie podobne, ale żadne z nich jest wnioskiem z drugiego. W przeciwieństwie do twierdzenia 2.23, powyższy wynik z pracy [32] nie wymaga zakładania liniowości, a dziedzina odwzorowania nie musi być całą przestrzenią, tylko pewnym otwartym podzbiorem. Z drugiej strony, pierwsze z tych twierdzeń jest prawdziwe także dla przestrzeni zespolonych. Warto jednak zwrócić uwagę, że oba wyniki są podobne w tym sensie, że dotyczą pewnego zachowywania/przenoszenia kątów. Odwzorowanie z twierdzenia 2.24 „przenosi dany kąt w pewien przeliczalny zbiór kątów”. Co więcej, „dany kąt” α_x oraz „zbiór kątów” Ω_x zawsze zależą od wierzchołka x. Natomiast operator z twierdzenia 2.23 „przenosi ustalony kąt $\angle_c$ w zbiór zbiór kątów $[\arccos(c+\varepsilon), \arccos(c-\varepsilon)]$”. Tym razem „zbiór kątów” jest nieprzeliczalny. Zauważmy jeszcze, że w tezie twierdzenia pochodzącego z pracy [32] jest podobieństwo, natomiast w tezie twierdzenia autora rozprawy występuje operator, który niekonieczie musi być podobieństwem.

Dla przestrzeni dowolnego wymiaru zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.26 [32, Proposition 2] *Niech H, K będą rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta, gdzie* $\dim H = n \geqslant 2$. *Załóżmy, że $\mathcal{V} \subset H$ jest niepusty, otwarty i niech $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$. Niech ponadto odwzorowanie $f\colon \mathcal{V} \to K$ spełnia następujący warunek: dla wszystkich punktów $u, x, w \in \mathcal{V}$, jeśli $\angle u, x, w = \alpha$, to $f(u) \neq f(x) \neq f(w)$ oraz $\angle f(u), f(x), f(w) = \alpha$. Wówczas f jest podobieństwem.*

Podstawiając w ostatnim twierdzeniu przestrzeń H zamiast zbioru $\mathcal{V}$ otrzymujemy

Wniosek 2.27 *Niech H, K będą rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta, gdzie* $\dim H = n \geqslant 2$ *i niech $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$. Załóżmy, że odwzorowanie $f\colon H \to K$ spełnia następujący warunek: dla wszystkich punktów $u, x, w \in H$, jeśli $\angle u, x, w = \alpha$, to $f(u) \neq f(x) \neq f(w)$ oraz $\angle f(u), f(x), f(w) = \alpha$. Wówczas f jest podobieństwem afinicznym*[7].

W pracy [11] znajduje się twierdzenie wraz z dowodem, które orzeka, że odwzorowanie liniowe zachowujące ortogonalność jest podobieństwem. Analogiczny wynik otrzymamy dla operatorów zachowujących ε-ortogonalność.

Twierdzenie 2.28 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ i załóżmy, że $c \in \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$ oraz $\varepsilon \in [0, 1-|c|)$. Wtedy dla niezerowego operatora $f\colon X \to Y$ następujące warunki są równoważne:*

[7] Zgodnie z twierdzeniem Mazura-Ulama, f jako podobieństwo jest także odwzorowaniem afinicznym. Istotnie, twierdzenie Mazura-Ulama orzeka, że jeśli izometria surjektywna odwzorowuje przestrzeń unormowaną U na przestrzeń unormowaną W (lub zamiast surjektywności założymy, że W jest przestrzenią ściśle wypukłą), to izometria, o której tu mowa musi być przekształceniem afinicznym. Łatwo więc widać, że twierdzenie Mazura-Ulama można wypowiedzieć także w takiej wersji gdzie słowo „izometria” zamienimy na „podobieństwo”, gdyż każde podobieństwo jest izometrią pomnożoną przez liczbę.

(i) $\exists_{\gamma>0}\forall_{x\in X}: \ \|fx\| = \gamma\|x\|$;
(ii) $\exists_{\gamma>0}\forall_{x,y\in X}: \ \langle fx|fy\rangle = \gamma^2\langle x|y\rangle$;
(iii) f *zachowuje* ε*-ortogonalność* (*tzn.* $\forall_{x,y\in X}: \ x\perp^{\varepsilon} y \ \Rightarrow \ fx\perp^{\varepsilon} fy$);
(iv) f *zachowuje ortogonalność;*
(v) f *zachowuje kąt* $\angle_c$ (*tzn.* $\forall_{x,y\in X}: \ x\angle_c y \ \Rightarrow \ fx\angle_c fy$);
(vi) f *zachowuje zachowuje relację* $\angle_c^{\varepsilon}$ (*tzn.* $\forall_{x,y\in X}: \ x\angle_c^{\varepsilon} y \ \Rightarrow \ fx\angle_c^{\varepsilon} fy$).

Dowód: W pracy [11] znajdują się dowody równoważności (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iv). Łatwo widać, że implikacja (ii)$\Rightarrow$(iii) jest prawdziwa. Aby udowodnić (iii)$\Rightarrow$(i), wystarczy teraz w twierdzeniu 2.21 podstawić $c := 0$ oraz $\delta := \varepsilon$. Wówczas $\|f\| = [f]$, więc f jest podobieństwem. Implikację (v)$\Rightarrow$(i) uzyskujemy przez podstawienie w twierdzeniu 2.21 $\delta = \varepsilon = 0$. Wreszcie implikację (vi)$\Rightarrow$(i) otrzymamy podstawiając $\delta := \varepsilon$. Implikacje (ii)$\Rightarrow$(v), (ii)$\Rightarrow$(vi) są łatwe do sprawdzenia. ■

Uwaga 2.29 W przypadku przestrzeni Hilberta nad $\mathbb{R}$, implikację (v)$\Rightarrow$(i) możemy udowodnić stosując twierdzenie 2.26 lub wniosek 2.27, ale tylko dla kątów ostrych oprócz kąta 60^o. Ponadto implikacji (iv)$\Rightarrow$(i) nie można wyprowadzić ani z twierdzenia 2.26 ani z wniosku 2.27.

Wniosek 2.30 *Niech X będzie przestrzenią unitarną nad $\mathbb{K}$, a liczby $c \in \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$ oraz $\varepsilon \in [0, 1-|c|)$ będą ustalone. Załóżmy, że $\langle\cdot|\cdot\rangle_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_2 : X \times X \to \mathbb{K}$ są iloczynami skalarnymi określonymi w tej przestrzeni. Wówczas następujące warunki są równoważne*[8]:
(1) $\exists_{\gamma>0}\forall_{x\in X}: \ \|x\|_2 = \gamma\|x\|_1$;
(2) $\exists_{\gamma>0}\forall_{x,y\in X}: \ \langle x|y\rangle_2 = \gamma^2\langle x|y\rangle_1$;
(3) $\perp^{\varepsilon}_1 \subset \perp^{\varepsilon}_2$; (3') $\perp^{\varepsilon}_1 = \perp^{\varepsilon}_2$;
(4) $\perp_1 \subset \perp_2$; (4') $\perp_1 = \perp_2$;
(5) $\angle_{c(1)} \subset \angle_{c(2)}$; (5') $\angle_{c(1)} = \angle_{c(2)}$;
(6) $\angle^{\varepsilon}_{c(1)} \subset \angle^{\varepsilon}_{c(2)}$; (6') $\angle^{\varepsilon}_{c(1)} = \angle^{\varepsilon}_{c(2)}$.

Dowód: Rozważmy odwzorowanie liniowe $f\colon (X, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \to (X, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ określone wzorem $fx := x$. Równoważności (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(6) wynikają wtedy bezpośrednio z równoważności (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(v)$\Leftrightarrow$(vi) w twierdzeniu 2.28.

Implikacja (3')$\Rightarrow$(3) jest oczywista, a równoważność (3)$\Leftrightarrow$(2) uzasadniliśmy przed chwilą. Zakładając teraz (2) można bez trudu otrzymać (3'). Zatem równoważność (2)$\Leftrightarrow$(3') jest wykazana. Podobnie wyprowadzamy (2)$\Leftrightarrow$(4'), (2)$\Leftrightarrow$(5') oraz (2)$\Leftrightarrow$(6'). ■

Końcową część podrozdziału przeznaczymy na porównanie wyniku z pracy [30] z wynikiem uzyskanym przez autora tej rozprawy. Poniższe twierdzenia charakteryzują operatory (δ, ε)-zachowujące ortogonalność.

Twierdzenie 2.31 [30, str.12] *Niech H, K będą przestrzeniami Hilberta, $\delta, \varepsilon \in [0,1)$ i niech $T\colon H \to K$ będzie operatorem, który (δ,ε)-zachowuje ortogonalność. Wtedy istnieje stała $\lambda_o \in \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\delta+1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2+\delta\right\}$ taka, że*

$$\forall_{x\in H}: \ \mu\|T\|\cdot\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \|T\|\cdot\|x\|, \tag{2.22}$$

gdzie $\mu = \sqrt{\frac{|\lambda_o|^2 - \varepsilon|\lambda_o|^2}{(\delta+1)^2+\varepsilon(\delta+1)^2}} > 0$.

[8] Symbole $\perp_k, \perp^{\varepsilon}_k, \angle_{c(k)}, \angle^{\varepsilon}_{c(k)}$ oznaczają odpowiednio relacje $\perp, \perp^{\varepsilon}, \angle_c, \angle^{\varepsilon}_c$ zdefiniowane przez odpowiedni iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle_k$, gdzie $k = 1, 2$.

Twierdzenie 2.32 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi, a $f\colon X \to Y$ będzie niezerowym odwzorowaniem liniowym, (δ,ε)-zachowującym ortogonalność, tzn. spełniającym*

$$\forall_{x,y\in X}:\ x\perp^{\delta} y \ \Rightarrow\ fx\perp^{\varepsilon} fy.$$

Wówczas f jest ciągłe, injektywne, $\delta \leqslant \varepsilon$ oraz f spełnia:

$$\forall_{x\in X}:\ \gamma\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|, \tag{2.23}$$

gdzie $\gamma = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}$.

Dowód: Należy w twierdzeniu 2.21 podstawić $c = 0$. Wtedy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\|f\| \leqslant [f]$, a stąd dla każdego $x \in X$ otrzymujemy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\|f\|\cdot\|x\| \leqslant [f]\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|$. ∎

Stała ograniczająca operator od dołu w twierdzeniu 2.31, otrzymana przez autorów w pracy [30], wynosi $\mu = \sqrt{\frac{|\lambda_o|^2-\varepsilon|\lambda_o|^2}{(\delta+1)^2+\varepsilon(\delta+1)^2}} > 0$, gdzie $\lambda_o \in \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\delta+1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2+\delta\right\}$. Jednakże nie można jednoznacznie stwierdzić, która ze stałych, μ z (2.22) czy γ z (2.23), jest lepsza (przez lepszą, rozumiemy tutaj taką, która jest bliższa 1; oczywiście zawsze jest $\mu \leqslant 1$, $\gamma \leqslant 1$) dlatego, że dokładna wartość liczby λ_o jest nieznana. Autorzy wykazali w [30], że liczba λ_o istnieje w zbiorze $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\delta+1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2+\delta\right\}$.

Uzasadnimy tutaj, że stała γ z twierdzenia 2.32 zawiera więcej informacji niż μ. Najpierw zauważymy, że nie istnieje odwzorowanie liniowe (δ,ε)-zachowujące ortogonalność w sytuacji kiedy $\delta > \varepsilon$. Zatem dzięki postaci stałej γ wiemy[9] już, że zawsze $\delta \leqslant \varepsilon$, czego nie można wyprowadzić ze stałej μ. Następnie możemy rozważać operatory zachowujące ε-ortogonalność, tzn. takie, kiedy jest równość $\delta = \varepsilon$ (por. twierdzenie 2.28). Wówczas twierdzenie 2.32 dostarcza $\gamma = 1$, więc taki operator jest podobieństwem (zauważmy, że ponownie udowodniliśmy (iii)$\Rightarrow$(i) z twierdzenia 2.28). Natomiast twierdzenie 2.31 oznajmia tylko tyle, że operator f zachowujący ε-ortogonalność spełnia jedynie warunek $\forall_{x\in H}:\ \sqrt{\frac{|\lambda_o|^2-\varepsilon|\lambda_o|^2}{(\varepsilon+1)^2+\varepsilon(\varepsilon+1)^2}}\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|$, z czego nic szczególnego nie można wywnioskować na temat operatora f.

2.4 Stabilność własności zachowywania relacji $\angle_c$

Przejdziemy do zapowiadanego już wcześniej zagadnienia stabilności. W twierdzeniu 2.18 operator h dokładnie zachowujący ortogonalność (operator h był podobieństwem) aproksymowaliśmy operatorem f, który (δ,ε)-zachowywał kąt $\angle_c$, gdzie δ,ε zależały od odległości $\|f-h\|$. Natomiast teraz wykażemy, że zachodzi również sytuacja odwrotna (czyli to co jest dla nas bardziej istotne w rozważaniach nad stabilnością), tzn.: wykażemy, że operator (δ,ε)-zachowujący kąt $\angle_c$ może być aproksymowany przez taki, który dokładnie zachowuje kąt $\angle_c$.

[9] W dowodzie twierdzenia 2.21 (czyli wyniku ogólniejszego niż twierdzenie 2.32), uzasadniono, że $\delta \leqslant \varepsilon$. Stosowano przy tym postać stałej η. Natomiast w twierdzeniu 2.32, stała γ jest „szczególnym przypadkiem" stałej η. Dlatego pisząc tutaj „... dzięki postaci stałej γ wiemy ...", mamy na myśli to rozumowanie, które przeprowadzono w dowodzie twierdzenia 2.21, gdzie właśnie stosowano postać stałej η.

Twierdzenie 2.33 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że $\dim X = n$, $|c| < 1$ oraz $\delta, \varepsilon \in [0, 1-|c|)$. Wówczas dla każdego niezerowego odwzorowania liniowego $f\colon X \to Y$ spełniającego $\forall_{x,y\in X} : x\angle_c^\delta y \Rightarrow fx\angle_c^\varepsilon fy$, istnieje odwzorowanie liniowe $h\colon X \to Y$ spełniające warunek $\forall_{x,y\in X} : x\angle_c y \Rightarrow hx\angle_c hy$, takie, że*

$$\|f-h\| \leqslant \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\tfrac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}\right)\|f\|.$$

Ponadto, $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ oraz h jest podobieństwem takim, że $\|h\| = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$.

Dowód: Załóżmy, że f (δ,ε)-zachowuje kąt $\angle_c$. Wówczas operator f jest injektywny (zob. lemat 2.20), zatem z twierdzenia 1.37 otrzymujemy podobieństwo liniowe $h\colon X \to Y$ takie, że $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ oraz $\|h\| = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$. Operator h zachowuje ustalony kąt (por. tw. 2.28). Następnie z twierdzenia 2.21 mamy nierówność $\eta\|f\| \leqslant [f]$ gdzie $\eta = \eta(c,\delta,\varepsilon) = \sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}$, a więc $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f]) \leqslant \frac{1}{2}(1-\eta)\|f\|$. ■

Podstawiając w powyższym twierdzeniu $c = 0$ lub jednocześnie $c = 0$, $\delta = 0$, dostajemy odpowiednio dwa poniższe wyniki.

Twierdzenie 2.34 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i załóżmy, że $\dim X = n$. Jeśli niezerowy operator $f\colon X \to Y$ (δ,ε)-zachowuje ortogonalność, to wówczas istnieje operator $h\colon X \to Y$ dokładnie zachowujący ortogonalność i taki, że*

$$\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right)\|f\|. \tag{2.24}$$

Ponadto, $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ oraz h jest podobieństwem takim, że $\|h\| = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$.

Twierdzenie 2.35 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i załóżmy, że $\dim X = n$. Jeśli niezerowy operator $f\colon X \to Y$ ε-prawie zachowuje ortogonalność, to wówczas istnieje operator $h\colon X \to Y$ dokładnie zachowujący ortogonalność i taki, że*

$$\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|. \tag{2.25}$$

Ponadto, $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ oraz h jest podobieństwem takim, że $\|h\| = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$.

Aby uzyskać powyższe rezultaty, ale bez założenia o skończonym wymiarze (lecz tylko dla przestrzeni zespolonych), musimy powołać się na twierdzenia 1.38 i 1.39.

Twierdzenie 2.36 *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta, Y zespoloną przestrzenią unitarną. Załóżmy, że $|c| < 1$ oraz $\delta, \varepsilon \in [0, 1-|c|)$. Jeśli niezerowy operator $f\colon H \to Y$ (δ,ε)-zachowuje kąt $\angle_c$, to wówczas istnieje operator $h\colon H \to Y$ dokładnie zachowujący kąt $\angle_c$ i taki, że*

$$\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}\right)\|f\|. \tag{2.26}$$

Ponadto, $\|f-h\| = \frac{1}{2}(\|f\| - [f])$ oraz h jest podobieństwem takim, że $\|h\| = \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$.

Dowód: Z twierdzenia 2.21 można otrzymać nierówność $\sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}\|f\|\leqslant[f]$. Powołując się na twierdzenie 1.39 dostajemy liniowe podobieństwo $h\colon H\to Y$, które dokładnie zachowuje ustalony kąt (zob. tw. 2.28) oraz $\|f-h\|=\frac{1}{2}(\|f\|-[f])$, a także $\|h\|=\frac{1}{2}([f]+\|f\|)$. Następnie $\|f-h\|=\frac{1}{2}(\|f\|-[f])\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-(|c|+\varepsilon)}{1+(|c|+\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{1+(|c|+\delta)}{1-(|c|+\delta)}}\right)\|f\|$ a więc (2.26) zostało udowodnione. ■

Przyjmując w powyższym twierdzeniu $c=0$ dostaniemy następujący wynik.

Twierdzenie 2.37 *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta, Y przestrzenią unitarną. Jeśli niezerowy operator $f\colon H\to Y$ (δ,ε)-zachowuje ortogonalność, to wówczas istnieje operator $h\colon H\to Y$ dokładnie zachowujący ortogonalność i taki, że*

$$\|f-h\|\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right)\|f\|. \tag{2.27}$$

Ponadto, $\|f-h\|=\frac{1}{2}\left(\|f\|-[f]\right)$ oraz h jest podobieństwem takim, że $\|h\|=\frac{1}{2}([f]+\|f\|)$.

Porównamy teraz uzyskane przez autora rozprawy twierdzenia 2.34 oraz 2.37, z wynikami pochodzącymi ze wspomnianej już pracy. Mianowicie, w [30, str.12, nierówość (6)] uzyskano bardzo podobne twierdzenie do powyższego, lecz zamiast (2.27), jest tam nierówność

$$\|f-h\|\leqslant(1-\mu)\|f\|, \tag{2.28}$$

gdzie $\mu=\sqrt{\frac{|\lambda_o|^2-\varepsilon|\lambda_o|^2}{(\delta+1)^2+\varepsilon(\delta+1)^2}}>0$, dla pewnej liczby $\lambda_o\in\left\{z:\frac{\delta+1}{2}\leqslant|z|\leqslant2+\delta\right\}$. Zauważmy, że szacowanie w (2.24) oraz w (2.27) przynosi więcej informacji niż, to z [30, str.12]. Istotnie, im bliższe zeru są δ oraz ε (bądź im mniejsza jest różnica między δ a ε), tym bliżej operatora f znajduje się operator h, co łatwo widać z (2.24) oraz z (2.27). Natomiast tego samego efektu nie można zauważyć (co nie oznacza, że go nie ma) w (2.28).

Niżej prezentujemy rezultat pochodzący z pracy [47], który pozwala aproksymować operatory ε-prawie zachowujące ortogonalność przez operatory zachowujące prostopadłość dokładnie. Następnie wykażemy podobne twierdzenie uzyskane przez autora rozprawy oraz omówimy różnice między tymi wynikami.

Twierdzenie 2.38 [47, Theorem 2.3] *Niech H,K będą przestrzeniami Hilberta nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $f\colon H\to K$ będzie niezerowym operatorem, ε-prawie zachowującym ortogonalność. Wtedy istnieje operator $h_1\colon H\to K$ dokładnie zachowujący ortogonalność i taki, że $\|h_1\|=\|f\|$ oraz*

$$\|f-h_1\|\leqslant\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|. \tag{2.29}$$

Twierdzenie 2.39 *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta, Y zespoloną przestrzenią unitarną i niech $f\colon H\to Y$ będzie niezerowym operatorem, ε-prawie zachowującym ortogonalność. Wtedy istnieje operator $h_2\colon H\to Y$ dokładnie zachowujący ortogonalność i taki, że $\|h_2\|=\frac{1}{2}([f]+\|f\|)$ oraz*

$$\|f-h_2\|\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|. \tag{2.30}$$

Ponadto, $\|f-h\|=\frac{1}{2}\left(\|f\|-[f]\right)$.

Dowód: Podstawiając w twierdzeniu 2.36 $c = 0$, $\delta = 0$ otrzymujemy tezę. ■

Zauważmy najpierw, że w twierdzeniu 2.38 rozważane są przestrzenie Hilberta dowolnego wymiaru nad dowolnym ciałem liczbowym, natomiast w twierdzeniu 2.35 przestrzenie są nad dowolnym ciałem, ale dziedzina operatorów ma skończony wymiar. Z kolei w twierdzeniu 2.39 przestrzenie są zespolone i mają dowolny wymiar. Jednakże należy tutaj zwrócić uwagę na jakość sposobu przybliżania operatorów. Ze względu na stałą $\frac{1}{2}$, dokładniejsze aproksymowanie jest w (2.25) oraz w (2.30) niż w (2.29). Co więcej, okazuje się, że jeśli operator $f\colon H \to Y$ określony jest na zespolonej przestrzeni Hilberta, bądź na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej, i ε-prawie zachowuje ortogonalność (ale nie zachowuje prostopadłości dokładnie), to $\|f - h_2\| < \|f - h_1\|$. Istotnie, nierówność ta jest konsekwencją twierdzeń 1.40, 2.38 oraz 2.39, ponieważ dla $\beta := \frac{1}{2}([f] + \|f\|)$ mamy $\|h_2\| = \beta$ oraz $\|h_1\| \neq \beta$. Zatem z punktu (b) z twierdzenia 1.40 mamy

$$\|f - h_2\| = \tfrac{1}{2}(\|f\| - [f]) < \|f - h_1\|.$$

Oczywiście równość jest tylko w trywialnym przypadku, kiedy f dokładnie zachowuje prostopadłość. Wówczas $f = h_1 = h_2$, więc $\|f - h_2\| = \|f - h_1\| = 0$.

Powyższe rozważania sugerują, że prezentowana aproksymacja w (2.25) oraz w (2.30) jest istotnie dokładniejsza niż ta z twierdzenia 2.38. Ponadto, aproksymacje te nie mogą być poprawione ze względu na wynik zawarty w twierdzeniu 1.40. Mianowicie, nie ma już operatora zachowującego ortogonalność, który znajdowałby się bliżej operatora f niż operator h_2.

Należy jednak wspomnieć tutaj o tym, że w pracy [47] wykazano, że stałej $1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ szacującej w (2.29) nie można polepszyć (czyli pomniejszyć), co mogłoby się wydawać sprzeczne z tym, co napisaliśmy przed chwilą o aproksymacjach w (2.25) oraz (2.30). Zatem konieczne jest natychmiastowe wyjaśnienie tej pozornej nieścisłości.

W twierdzeniu 2.38 dokonuje się aproksymacji operatorem zachowującym ortogonalność, który dodatkowo ma normę równą normie wyjściowego operatora[10]. Jeśli rozważymy standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, to wtedy wg [47, Example 2.4, Claim 1], operator $T \in B(\mathbb{R}^n)$ dany wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) := \left(\sqrt{\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right),$$

ε-prawie zachowuje ortogonalność. Zauważmy, że $\|T\| = 1$, a więc $\|T\| = \|U\|$ dla każdego unitarnego operatora $U \in B(\mathbb{R}^n)$.

Następnie w [47, Claim 2] wykazano równość

$$\min\{\|T - U\| : U \in B(\mathbb{R}^n) \text{ jest unitarny}\} = 1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \tag{2.31}$$

Skoro $\|T\| = 1$, to z powyższej równości i z twierdzenia 2.38 wyprowadzamy

$$\left(1 - \sqrt{\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|T\| \overset{(2.31)}{\leqslant} \|T - h_1\| \overset{(2.29)}{\leqslant} \left(1 - \sqrt{\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|T\|,$$

dla pewnego operatora $h_1 \in B(\mathbb{R}^n)$, który jest unitarny, bo zachowuje ortogonalność, jest surjekcją oraz $\|h_1\| = 1$.

[10] por. równość $\|f\| = \|h_1\|$ w twierdzeniu 2.38

Podsumujmy nasze ostatnie rozważania: w sytuacji aproksymowania operatorem zachowującym ortogonalność, który ponadto ma normę równą normie wyjściowego operatora, to stałej $1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ rzeczywiście nie można pomniejszyć.

Natomiast w twierdzeniach 2.35 oraz 2.30 chodzi o to, aby znaleźć najbliższy operator zachowujący ortogonalność (bez dodatkowych wymagań odnośnie normy operatorów). W kontekście aproksymacji, tej rozważanej w rozprawie, wnioskujemy na mocy twierdzenia 2.35, że istnieje operator $h \in B(\mathbb{R}^n)$ zachowujący ortogonalność, taki, że $\|T-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)$. Stąd także $\|T-h\| < \|T-U\|$ dla każdego unitarnego operatora U.

Rozważania ostatniej części podrozdziału będą obejmowały zagadnienie *surjektywnej stabilności własności zachowywania ortogonalności.* Mianowicie, sprawdzimy kiedy jest możliwe aby operator ε-prawie zachowujący ortogonalność, aproksymować z taką samą dokładnością jak w (2.30), operatorem dokładnie zachowującym ortogonalność, który jest także odwracalny (surjektywny[11]).

Twierdzenie 2.40 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta nad ciałem $\mathbb{C}$. Załóżmy, że operator $f \in B(H)$ jest odwracalny oraz ε-prawie zachowuje ortogonalność, gdzie $\varepsilon < \frac{4}{5}$. Wtedy istnieje odwracalny operator $h \in B(H)$ zachowujący dokładnie ortogonalność oraz spełniający nierówność $\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|$.*

Dowód: Dla operatora f zachodzi nierówność $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \leqslant [f]$ (zob. twierdzenie 2.22). Korzystając z twierdzenia 2.39 wiemy, że istnieje dokładnie zachowujący ortogonalność operator $h \in B(H)$, dla którego zachodzi

$$\|f-h\| = \tfrac{1}{2}\left(\|f\| - [f]\right) \quad \text{oraz} \quad \|f-h\| \leqslant \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|.$$

Ponieważ mamy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|f\| \leqslant [f]$ oraz $\varepsilon < \frac{4}{5}$, więc $\frac{1}{3}\|f\| < [f]$. Zatem dzięki twierdzeniu 1.42 możemy stwierdzić, że h jest odwracalny. ■

Ostatnie twierdzenie podrozdziału ukazuje, że nieodwracalnego operatora ε-prawie zachowującego ortogonalność nie można aproksymować, z taką dokładnością jak przed chwilą, odwracalnym operatorem zachowującym ortogonalność. Mamy bowiem:

Twierdzenie 2.41 *Niech $f, h \in B(H)$, gdzie f ε-prawie zachowuje ortogonalność oraz operator h dokładnie zachowuje ortogonalność. Jeżeli f jest nieodwracalny i zachodzi oszacowanie $\|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)\|f\|$, to h nie może być odwracalny.*

Dowód: Dla dowodu nie wprost załóżmy, że h jest odwracalny i przyjmijmy dla krótszego zapisu $\alpha := \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$. Z oszacowania w założeniach wnosimy $\|f\|-\|h\| \leqslant \|f-h\| \leqslant \frac{1}{2}(1-\alpha)\|f\|$ (skoro h jest odwracalny, a f nie jest, to $f \neq h$, więc $\alpha < 1$), a stąd po odpowiednim przekształceniu dostajemy nierówność

$$\frac{1}{2}(1+\alpha)\|f\| \leqslant \|h\|. \tag{2.32}$$

[11] Każdy niezerowy operator zachowujący ortogonalność jest liniowym podobieństwem, w szczególności injekcją. Zatem ten operator jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjekcją.

Operator h jest podobieństwem, więc $T := \frac{h}{\|h\|}$ jest odwracalną izometrią. Stąd T^{-1} też jest izometrią, a następnie z oszacowania w założeniach wnosimy $\left\|\frac{f}{\|h\|} - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \frac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\|f\|}{\|h\|}$. Podstawiając T do ostatniej nierówności oraz korzystając z (2.32) otrzymujemy nierówności $\left\|\frac{f}{\|h\|} - T\right\| \leqslant \frac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\|f\|}{\|h\|} \leqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha} < 1$, a następnie,

$$\left\|I - \frac{f}{\|h\|}\circ T^{-1}\right\| = \left\|\frac{f}{\|h\|}\circ T^{-1} - I\right\| = \left\|\left(\frac{f}{\|h\|} - T\right)\circ T^{-1}\right\| \leqslant \left\|\frac{f}{\|h\|} - T\right\|\cdot\|T^{-1}\| < 1.$$

Na mocy twierdzenia 1.6, stwierdzamy, że $\frac{f}{\|h\|}\circ T^{-1} = I - \left(I - \frac{f}{\|h\|}\circ T^{-1}\right) \in U(B(H))$, co oznacza, że f jest odwracalny. Sprzeczność z założeniem o f kończy dowód. ■

2.5 Struktura zbioru operatorów prawie zachowujących ortogonalność

Udowodniliśmy wcześniej, że operatory liniowe ε-prawie zachowujące ortogonalność, określone pomiędzy przestrzeniami unitarnymi X, Y są ograniczone z dołu i z góry (zob. tw. 2.22). Rezultat ten został już wcześniej wykazany innymi metodami w pracach [11] oraz [47]. W tym podrozdziale pokażemy twierdzenie odwrotne: tzn. każdy operator ograniczony z dołu i z góry musi ε-prawie zachowywać ortogonalność dla pewnego $\varepsilon \in [0,1)$ zależnego tylko od f. Ponownie będziemy potrzebowali twierdzenia o bazie względem operatora. Dowód poniższego rezultatu powstał na podstawie przykładu 4 z pracy [11].

Twierdzenie 2.42 *Jeżeli $f \in L(X;Y)$ oraz $0 < [f] \leqslant \|f\| < +\infty$, to f spełnia warunek*

$$\forall_{x,y\in X}:\ x\perp y \ \Rightarrow\ fx\perp^{\varepsilon_f} fy,$$

gdzie $\varepsilon_f = 1 - \frac{[f]^2}{\|f\|^2}$.

Dowód: Operator f jest injektywny ponieważ $0 < [f]$. Ustalmy wektory $x, y \in X\setminus\{0\}$ takie, że $x\perp y$. Pokażemy, że $fx\perp^{\varepsilon_f} fy$. Z twierdzenia 1.24 wiemy, że istnieją wektory $a, b \in S(X)\cap \mathrm{Lin}\{x,y\}$ takie, że $a\perp b$, $fa\perp fb$ oraz spełnione są równości

$$\|fa\| = \inf\{\|fw\| : w \in S(X)\cap\mathrm{Lin}\{x,y\}\},\ \|fb\| = \sup\{\|fw\| : w\in S(X)\cap\mathrm{Lin}\{x,y\}\}.$$

Dla pewnych $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{K}$ mamy $x = \alpha a + \beta b$, $y = \gamma a + \delta b$, a skoro $x\perp y$, to

$$\alpha\gamma = -\beta\delta. \tag{2.33}$$

Ponadto $fx = \alpha fa + \beta fb$, $fy = \gamma fa + \delta fb$. Jeżeli $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, to łatwo widać, że $\langle fx|fy\rangle = 0$, a więc w szczególności $fx\perp^{\varepsilon_f} fy$. Załóżmy teraz $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ i oznaczmy $\vartheta := \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\delta}{\gamma}$.

Korzystając z powyższych równości i warunków otrzymujemy

$$\frac{|\langle fx|fy\rangle|}{\|fx\|\,\|fy\|} \overset{(2.33)}{=} \frac{|\,\alpha\gamma\|fa\|^2+\beta\delta\|fb\|^2\,|}{\sqrt{|\alpha|^2\|fa\|^2+|\beta|^2\|fb\|^2}\cdot\sqrt{|\gamma|^2\|fa\|^2+|\delta|^2\|fb\|^2}}$$

$$= \frac{(\|fb\|^2-\|fa\|^2)\,|\alpha\gamma|}{\sqrt{|\alpha|^2\|fa\|^2+|\beta|^2\|fb\|^2}\cdot\sqrt{|\gamma|^2\|fa\|^2+|\delta|^2\|fb\|^2}} =$$

$$= \frac{1-\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}}{\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{|\alpha|^2\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}+|\beta|^2}\cdot\frac{1}{|\gamma|}\sqrt{|\gamma|^2\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}+|\delta|^2}} = \frac{1-\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}}{\sqrt{\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}+\frac{1}{|\vartheta|^2}}\sqrt{\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}+|\vartheta|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2}}{\sqrt{\frac{\|fa\|^4}{\|fb\|^4}+1}} \leqslant 1-\frac{\|fa\|^2}{\|fb\|^2} \leqslant 1-\frac{[f]^2}{\|f\|^2},$$

zatem $fx\perp^{\varepsilon_f} fy$. ■

Dla $\varepsilon \in [0,1)$ definiujemy następujące podzbiory zbioru operatorów $L(X;Y)$.

$$P^\varepsilon(X;Y) := \{f \in L(X;Y) \ :\ f \neq 0,\ \forall_{x,y\in X}\ x\perp y \Rightarrow fx\perp^\varepsilon fy\},$$
$$P^\varepsilon(X) := P^\varepsilon(X;X).$$

Od razu możemy zauważyć, że $P^0(X;Y)$ jest zbiorem wszystkich liniowych podobieństw, natomiast $ISOM(X;Y) := P^0(X;Y)\cap S(B(X;Y))$ jest zbiorem wszystkich liniowych izometrii. Ponadto, z twierdzeń 2.22 oraz 2.42 wynika, że zbiór operatorów ciągłych i ograniczonych od dołu można przedstawić w postaci sumy $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X;Y)$.

Znane jest twierdzenie (zob. [15, str.160]) orzekające, że zbiór ciągłych operatorów odwracalnych, odwzorowujących przestrzeń Banacha V w siebie jest otwarty w $B(V)$ (w topologii zadanej przez normę). Pokażemy tutaj rezultat nawiązujący do tego faktu. Zauważmy, że zbiór $P^\varepsilon(X;Y)$ jest domknięty w $B(X;Y)$. Istotnie, przyjmijmy, że $f_n \in P^\varepsilon(X;Y)$ dla $n\in\mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$. Ustalmy $x,y\in X$ takie, że $x\perp y$. Wtedy dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ otrzymujemy $|\langle f_nx|f_ny\rangle| \leqslant \varepsilon\|f_nx\|\cdot\|f_ny\|$. Stąd i z ciągłości iloczynu skalarnego dostajemy $|\langle fx|fy\rangle| \leqslant \varepsilon\|fx\|\cdot\|fy\|$. Pokażemy teraz, że zbiór wszystkich operatorów prawie zachowujących ortogonalność jest otwarty.

Twierdzenie 2.43 *Jeżeli X,Y są przestrzeniami unitarnymi, to $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X;Y)$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni unormowanej $B(X;Y)$.*

Dowód: Ustalmy $f\in\bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X;Y)$. Wówczas dla pewnego $\varepsilon_o\in[0,1)$ odwzorowanie f spełnia warunek $\forall_{x,y\in X}\ x\perp y \Rightarrow fx\perp^{\varepsilon_o} fy$. Zatem z twierdzenia 2.22 dostajemy ciągłość operatora f (czyli właśnie inkluzja $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X;Y)\subset B(X;Y)$ została wykazana) oraz $\sqrt{\frac{1-\varepsilon_o}{1+\varepsilon_o}}\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\|$ dla $x\in X$. Stąd $0<[f]$, bo $\sqrt{\frac{1-\varepsilon_o}{1+\varepsilon_o}}\|f\| \leqslant [f]$.

Ustalmy liczbę $r\in(0,[f])$. Wykażemy, że $K(f,r)\subset\bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X;Y)$. Niech $g\in K(f,r)$. Stąd $\|f-g\|<r$, zatem dla każdego $x\in S(X)$ dostajemy

$$|\,\|gx\|-\|fx\|\,| \leqslant \|fx-gx\| \leqslant r,$$

a więc

$$0 < [f] - r \leqslant \|fx\| - r \leqslant \|gx\| \leqslant \|fx\| + r \leqslant \|f\| + r.$$

Stąd w szczególności $0 < [f]-r \leqslant [g]$ oraz $\|g\| \leqslant \|f\|+r$. Zatem z twierdzenia 2.42 wynika, że dla $\varepsilon_g := 1 - \frac{[g]^2}{\|g\|^2}$ operator g spełnia $\forall_{x,y\in X}\ x\perp y \Rightarrow fx\perp^{\varepsilon_g} fy$, stąd $g \in P^{\varepsilon_g}(X;Y)$. ■

Twierdzenie 2.44 *Jeśli X, Y, Z są przestrzeniami unitarnymi oraz operatory $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ prawie zachowują ortogonalność, odpowiednio z $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,1)$, to $g \circ f$ ε-prawie zachowuje ortogonalność z $\varepsilon = 1 - \frac{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$.*

Dowód: Stosując twierdzenie 2.22 dostajemy $\sqrt{\frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}\|f\| \leqslant [f]$ oraz $\sqrt{\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}}\|g\| \leqslant [g]$. Stąd

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}}\|g\circ f\| \leqslant \sqrt{\frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}}\|g\|\cdot\|f\| \leqslant [g]\cdot[f] \leqslant^{12} [g\circ f].$$

Teraz dostajemy $1 - \frac{[g\circ f]^2}{\|g\circ f\|^2} \leqslant 1 - \frac{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$. Z twierdzenia 2.42 wynika, że odwzorowanie $g \circ f$ $\varepsilon_{g\circ f}$-prawie zachowuje ortogonalność $\left(\text{gdzie } \varepsilon_{g\circ f} := 1 - \frac{[g\circ f]^2}{\|g\circ f\|^2}\right)$, a więc w szczególności z liczbą $\varepsilon := 1 - \frac{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$ również. ■

Twierdzenie 2.45 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla dowolnego odwracalnego $f \in B(H)$ zachodzi $f, f^{-1} \in P^\varepsilon(H)$, gdzie $\varepsilon = 1 - \frac{[f]^2}{\|f\|^2}$.*

Dowód: Operator f^{-1} jest ciągły (twierdzenie o operatorze odwrotnym). Z punktu (a) z lematu 1.2 dostajemy $0 < [f] = \frac{1}{\|f^{-1}\|}$ oraz $0 < [f^{-1}] = \frac{1}{\|f\|}$, a z twierdzenia 2.42 mamy $f \in P^\varepsilon(H)$, $f^{-1} \in P^{\varepsilon_1}(H)$ dla $\varepsilon = 1 - \frac{[f]^2}{\|f\|^2}$, $\varepsilon_1 = 1 - \frac{[f^{-1}]^2}{\|f^{-1}\|^2}$. Łatwo widać, że $\varepsilon = \varepsilon_1$. ■

Twierdzenie 2.46 *Niech X, H będą odpowiednio przestrzenią unitarną i przestrzenią Hilberta. Wówczas*

(a) *Zbiór $\bigcup\limits_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X)$ z działaniem składania jest półgrupą z jednością;*

(b) *$U(B(H))$ jest podpółgrupą półgrupy $\bigcup\limits_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(H)$, ozn.: $U(B(H)) < \bigcup\limits_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(H)$;*

(c) *$ISOM(X) < P^0(X) < \bigcup\limits_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(X)$.*

Dowód: Podstawienie przestrzeni X w miejsce Y oraz Z w twierdzeniu 2.44, dostarcza jako wniosek punkt (a). Niech teraz $f \in U(B(H))$. Wtedy z twierdzenia o operatorze odwrotnym f^{-1} również jest ciągły (czyli $0 < \|f^{-1}\| < +\infty$), więc z lematu 1.2 dostajemy $0 < \frac{1}{\|f^{-1}\|} = [f] \leqslant \|f\| < +\infty$. Stąd i z twierdzenia 2.42 jest $f \in \bigcup\limits_{\varepsilon\in[0,1)} P^\varepsilon(H)$. Wykazaliśmy (b). Łatwo widać, że (c) jest również prawdziwe. ■

Ograniczając się do operatorów określonych na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej okazuje się, że operator jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy prawie zachowuje ortogonalność. Istotnie, zachodzi poniższy rezultat.

[12]zob. lemat 1.1

Twierdzenie 2.47 *Jeżeli* $\dim X < +\infty$, *to wtedy* $U(B(X)) = \bigcup_{\varepsilon\in[0,1)} P^{\varepsilon}(X)$.

Dowód: Przestrzeń X jest zupełna. Stosując (b) z twierdzenia 2.46 dostajemy "$\subset$".
Na odwrót, jeśli f prawie zachowuje ortogonalność, to z twierdzenia 2.22 wynika, że f jest injekcją, a więc także surjekcją. Oczywiście f, f^{-1} są ciągłe. ∎

Do kolejnych rozważań tego podrozdziału potrzebne jest zdefiniowanie funkcji $\Gamma\colon L(X;Y) \to [0,1]$, którą określamy wzorem

$$\Gamma(f) := \sup\left\{\frac{|\langle fx|fy\rangle|}{\|fx\|\|fy\|} : x\perp y,\ x,y \notin \ker f\right\}$$

dla $f \neq 0$ oraz $\Gamma(0) := 1$. Wprost z definicji funkcji Γ widzimy, że jeśli $\Gamma(f) = \varepsilon$ i $\varepsilon < 1$, to f, ε-prawie zachowuje ortogonalność, tzn. $f \in P^{\varepsilon}(X;Y)$.
Niżej prezentujemy twierdzenie, które jest warunkiem koniecznym i wystarczającym jednoczesnej ograniczoności operatora z góry i z dołu. W dalszej części podrozdziału podamy własności funkcji Γ dotyczące wymiaru przestrzeni i pełnociągłości operatorów.

Twierdzenie 2.48 *Jeżeli operator* $f \in L(X;Y)$ *jest niezerowy, to wówczas*

$$0 < [f] \leqslant \|f\| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(f) < 1.$$

Dowód: Implikacja "$\Rightarrow$" wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.42. Załóżmy teraz prawą stronę powyższej równoważności. Wtedy f musi ε-prawie zachowywać ortogonalność z $\varepsilon := \Gamma(f) < 1$. Następnie z twierdzenia 2.22 otrzymujemy lewą stronę równoważności. ∎

Wniosek 2.49 *Jeśli* $f \in L(X;Y)$ *oraz* $\Gamma(f) < 1$, *to wtedy* $\ker f = \{0\}$ *oraz* f *jest ciągłe.*

Twierdzenie 2.50 *Funkcja* Γ *ma następujące własności:*
(a) $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} \forall_{f\in L(X;Y)} \quad \Gamma(\alpha f) = \Gamma(f)$;
(b) $\forall_{f,g\in L(X)} \quad \Gamma(f) < 1, \Gamma(g) < 1 \Rightarrow \Gamma(f\circ g) < 1$;
(c) $\forall_{f\in L(X;Y)} \quad \Gamma(f) < 1 \Rightarrow f \in P^{\Gamma(f)}(X;Y)$;

Dowód: Własność (a) łatwo widać. Własność (b) wynika z twierdzenia 2.48 i lematu 1.1. Własność (c) wynika bezpośrednio z definicji funkcji Γ. ∎

Wniosek 2.51 *Niech* $\langle\cdot|\cdot\rangle_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_2$ *będą dwoma iloczynami skalarnymi*[13] *określonymi na przestrzeni* X. *Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(1) *normy* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *są równoważne;*
(2) $\sup\left\{\frac{|\langle x|y\rangle_2|}{\|x\|_2\|y\|_2} : x\perp_1 y,\ x,y \in X\setminus\{0\}\right\} < 1$;
(3) $\sup\left\{\frac{|\langle x|y\rangle_1|}{\|x\|_1\|y\|_1} : x\perp_2 y,\ x,y \in X\setminus\{0\}\right\} < 1$.

Dowód: Wystarczy rozważyć odwzorowanie $f\colon (X,\langle\cdot|\cdot\rangle_1) \to (X,\langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ zadane wzorem $fx := x$ i zastosować twierdzenie 2.48. ∎

Następne dwa wyniki charakteryzują odpowiednio liniowe odwzorowania różnowartościowe określone na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej oraz przestrzenie skończenie wymiarowe.

[13]od których pochodzą odpowiednio normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ oraz relacje $\perp_1$, $\perp_2$

Wniosek 2.52 *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest liniowe oraz X jest przestrzenią skończenie wymiarową, to f jest injekcją wtedy i tylko, wtedy, gdy $\Gamma(f) < 1$.*

Dowód: Jeśli założymy, że $\Gamma(f) < 1$, to z twierdzenia 2.48 mamy $0 < [f]$, a stąd $\ker f = \{0\}$. Odwrotnie, zakładając injektywność, dostajemy ze zwartości sfery jednostkowej w X i ciągłości f (zwartość sfery i ciągłość f wynika z założenia $\dim X < \infty$) nierówność $0 < [f]$. Skoro $0 < [f] \leqslant \|f\| < +\infty$, to teraz można zastosować twierdzenie 2.48. ■

Twierdzenie 2.53 *Dla każdego różnowartościowego operatora $f \in L(X)$ zachodzi nierówność $\Gamma(f) < 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowa.*

Dowód: Jeżeli X jest skończenie wymiarowa, to z wniosku 2.52 okazuje się, że nierówność $\Gamma(f) < 1$ musi zachodzić dla wszystkich injektywnych $f \in L(X)$.

Załóżmy teraz na odwrót, tzn. niech $\Gamma(f) < 1$ jest prawdziwe dla każdego różnowartościowego $f \in L(X)$. Dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że X jest nieskończenie wymiarowa. Ustalmy dowolny układ ortonormalny $\{e_k : k = 1, 2, \ldots\}$, a następnie uzupełnijmy go zbiorem A tak, aby $B := \{e_k : k = 1, 2, \ldots\} \cup A$ stanowiło bazę Hamela. Odwzorowanie liniowe $f \in L(X)$ zdefiniowane na bazie B wzorem $fe_k := ke_k$ oraz $fa := a$ dla $a \in A$ jest różnowartościowe, ale nie jest ciągłe. Stąd i z twierdzenia 2.48 otrzymujemy $\Gamma(f) = 1$. Oznacza to jednak sprzeczność z wcześniejszym założeniem. ■

Twierdzenie 2.54 *Niech H, K będą przestrzeniami Hilberta. Załóżmy ponadto, że operator $f \in B(H; K)$ jest różnowartościowy. Wówczas $\Gamma(f) < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma domknięty obraz.*

Dowód: Najpierw zakładamy, że $\Gamma(f) < 1$. Wtedy z twierdzenia 2.48 mamy $0 < [f]$. Następnie twierdzenie 1.4 pozwala stwierdzić, że $f(H)$ jest przestrzenią zupełną, a więc $f(H)$ jest także podprzestrzenią domkniętą w K.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że $f(H)$ jest domknięty. Wówczas z twierdzenia o operatorze odwrotnym, $f^{-1}\colon f(H) \to H$ musi być ciągłe. Stąd $\|f^{-1}\| < +\infty$, zatem z lematu 1.2 dostajemy $0 < \frac{1}{\|f^{-1}\|} = [f]$. Skoro $0 < [f] \leqslant \|f\| < +\infty$, to z twierdzenia 2.48 otrzymujemy $\Gamma(f) < 1$. ■

Zauważmy, że z nierówności $\Gamma(f) < 1$ wynika ciągłość i różnowartościowość operatora f. Można więc zadać pytanie, czy prawdziwa jest implikacja odwrotna. Mianowicie, czy ciągłość i różnowartościowość operatora f implikuje nierówność $\Gamma(f) < 1$. Odpowiedź negatywną podaje poniższy przykład.

Przykład 2.55 Określmy $f \in B(l^2)$ wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) := \left(\frac{1}{1}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right). \tag{2.34}$$

Łatwo widać ciągłość i różnowartościowość powyższego operatora. Jednak $0 = [f]$, bo dla wektorów $e_1 := (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 := (0, 1, 0, \ldots)$, …, które są ze sfery jednostkowej, dostajemy $0 \leqslant [f] \leqslant \|fe_k\| = \frac{1}{k}$. Zatem z twierdzenia 2.48 jest równość $\Gamma(f) = 1$.

Powyższy przykład pokazuje także, że nierówność $0 < [f]$ nie jest warunkiem równoważnym[14] injektywności operatora f nawet przy założeniu jego ciągłości. Podrozdział zakończymy krótkim omówieniem operatorów pełnociągłych.

Twierdzenie 2.56 *Niech X, Y będą przestrzeniami unitarnymi. Załóżmy ponadto, że X jest nieskończenie wymiarowa. Jeżeli $f \in B(X;Y)$ jest różnowartościowy i pełnociągły, to wówczas $\Gamma(f) = 1$.*

Dowód: Załóżmy, że $\Gamma(f) < 1$. Wtedy z poprzednich rezultatów stwierdzamy, że $0 < [f]$. Rozważmy teraz odwzorowanie f jako operator $f\colon X \to f(X)$. Na mocy lematu 1.3 dostajemy ciągłość operatora $f^{-1}\colon f(X) \to X$. Stąd $f\colon X \to f(X)$ jest homeomorfizmem. Z założenia o pełnociągłości wiemy, że zbiór $\overline{f\left(\overline{K}(X)\right)}$ jest zwarty, a skoro $f\colon X \to f(X)$ jest homeomorfizmem, to zachodzi równość $\overline{f\left(\overline{K}(X)\right)} =^{15} f\left(\overline{K}(X)\right)$, a więc $f\left(\overline{K}(X)\right)$ też jest zwarty. Obraz zbioru zwartego $f\left(\overline{K}(X)\right)$, przez odwzorowanie ciągłe $f^{-1}\colon f(X) \to X$, jest również zwarty, stąd $\overline{K}(X)$ jest także zbiorem zwartym. Oznacza to jednak sprzeczność, z tym, że w unormowanej przestrzeni nieskończenie wymiarowej, domknięta kula nie jest zbiorem zwartym. ■

Wniosek 2.57 *Ośrodkowa przestrzeń Hilberta H jest nieskończnie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje różnowartościowy operator pełnociągły $f \in B(H)$ taki, że $\Gamma(f) = 1$.*

Dowód: Załóżmy, że H jest rzeczywista i nieskończenie wymiarowa. Bez straty ogólności możemy założyć, że $H = l^2$. Operator (2.34) jest różnowartościowy i spełnia $\Gamma(f) = 1$. Aby uzasadnić pełnociągłość, musimy zauważyć, że

$$f\left(\overline{K}(l^2)\right) \subset \left[-\tfrac{1}{1};\tfrac{1}{1}\right] \times \left[-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right] \times \left[-\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{3}\right] \times \dots .$$

Zestawiając powyższą inkluzję i twierdzenie Tichonowa, przekonujemy się, że obraz domkniętej kuli jednostkowej zawiera się w zbiorze zwartym. Zatem pełnociągłość jest wykazana.

Odwrotna implikacja wynika z twierdzenia 2.53. Dowód w przypadku przestrzeni zespolonej przebiega w ten sam sposób. Jedynie należy rozważyć w powyższym iloczynie kartezjańskim domknięte koła $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$ zamiast przedziałów $\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]$ i również zastosować twierdzenie Tichonowa. ■

[14] W przykładzie 2.55 pokazaliśmy, że nierówność $0 < [f]$ nie jest warunkiem koniecznym. Oczywiście nierówność ta jest warunkiem wystarczającym injektywności operatora.

[15] Jeśli $\varphi\colon A_1 \to A_2$ jest homeomorfizmem miedzy przestrzeniami topologicznymi A_1, A_2, to dla każdego $M \subset A_1$ mamy $\overline{\varphi(M)} = \varphi\left(\overline{M}\right)$.

Rozdział 3

Relacje ortogonalności w przestrzeni unormowanej

3.1 Dokładna ortogonalność

W unitarnej przestrzeni $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ relację ortogonalności $\perp$ definiujemy za pomocą iloczynu skalarnego, tzn. $x \perp y \;:\Leftrightarrow\; \langle x|y\rangle = 0$. W tym rozdziale omówimy niektóre sposoby definiowania ortogonalności w przestrzeni unormowanej. Prace [1], [8], [25], [26] prezentują wiele różnych możliwości przeniesienia pojęcia ortogonalności z przestrzeni unitarnych do unormowanych. Natomiast w pracy [43] podano poniższą, aksjomatyczną definicję ortogonalności w przestrzeni wektorowej. Rzeczywistą przestrzeń wektorową V z relacją $\perp$ nazywamy *przestrzenią z ortogonalnością*, i oznaczamy $(V, \perp)$, jeśli ta relacja spełnia poniższe aksjomaty:

(1) $x \perp 0$, $0 \perp x$ dla dowolnego $x \in X$;
(2) jeśli $x, y \in X \setminus \{0\}$ oraz $x \perp y$, to x, y są liniowo niezależne;
(3) jeśli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ oraz $x \perp y$, to $\alpha x \perp \beta y$;
(4) dla każdej dwuwymiarowej podprzestrzeni P przestrzeni V i dla dowolnych $x \in P$, $\lambda \in [0, \infty)$, istnieje $y \in P$ takie, że $x \perp y$ oraz $x + y \perp \lambda x - y$.

Łatwe jest sprawdzenie, że rzeczywista przestrzeń unitarna z ortogonalnością wprowadzoną przez iloczyn skalarny jest przestrzenią z ortogonalnością w powyższym sensie.

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zdefiniujemy (por. [8], [25], [26]) *ortogonalność Birkhoffa (B-ortogonalność)* oraz dla przestrzeni rzeczywistej *ortogonalność Jamesa*[1] *(J-ortogonalność)*:

$$x \perp_B y \;:\Leftrightarrow\; \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \; \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|; \qquad x \perp_J y \;:\Leftrightarrow\; \|x + y\| = \|x - y\|.$$

W pracy [2] zebrano wiele wyników dotyczących podobieństw, różnic i zależności miedzy relacjami $\perp_B$, $\perp_J$. Jeżeli X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną, to $(X, \perp_B)$ jest przestrzenią z ortogonalnością (zob. [43], [45], [46]). Inny sposób definiowania ortogonalności wymaga użycia semi-iloczynu skalarnego. Przypomnijmy, że funkcjonał $[\cdot|\cdot] : X \times X \to \mathbb{K}$ nazywamy *semi-iloczynem skalarnym*, jeśli spełnia następujące warunki:

(sis1) $\forall_{x,y,z \in X} \; \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad [\alpha x + \beta y|z] = \alpha\,[x|z] + \beta\,[y|z]$;
(sis2) $\forall_{x,y \in X} \; \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad [x|\alpha y] = \overline{\alpha}\,[x|y]$;

[1] W literaturze ortogonalność Jamesa oznacza się zwykle symbolami $\perp_J$ lub $\perp_I$ (od isosceles-orthogonality).

(sis3) $\forall_{x\in X}\quad [x|x]=\|x\|^2$;
(sis4) $\forall_{x,y\in X}\quad |\,[x|y]\,|\leqslant \|x\|\cdot\|y\|$.

G. Lummer [33] oraz J. R. Gilles [23] wykazali, że w każdej przestrzeni unormowanej istnieje semi-iloczyn skalarny. Wiadomo, że w przestrzeni unormowanej X może być nieskończenie wiele semi-iloczynów skalarnych. Natomiast, w przestrzeni unormowanej X istnieje dokładnie jeden semi-iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią gładką[2]. Jeśli teraz $[\cdot|\cdot]$ jest ustalonym semi-iloczynem skalarnym, to *semi-ortogonalność* (w skrócie *s-ortogonalność*) definiujemy wzorem:

$$x\perp_s y \;:\Leftrightarrow\; [y|x]=0.$$

W tej samej przestrzeni X, relacje $\perp_B, \perp_s$ mogą być różne. Jednakże jeśli norma pochodzi od iloczynu skalarnego, to oba pojęcia ortogonalności zbiegają się ze „standardową" ortogonalnością, tzn.: $\perp\,=\,\perp_B\,=\,\perp_s$.

Załóżmy, że przestrzeń $(X,\|\cdot\|)$ jest rzeczywista. Wtedy funkcjonały $\rho'_+,\rho'_-\colon X\times X\to\mathbb{R}$, znane z literatury matematycznej jako *norm derivatives*, definiujemy wzorami:

$$\rho'_\pm(x,y):=\lim_{t\to 0^\pm}\frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{2t}=\|x\|\cdot\lim_{t\to 0^\pm}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}.$$

Przypomnimy teraz własności funkcjonałów $\rho'_\pm$ (dowody można znaleźć w [3] oraz [22]):
($\rho'_\pm 1$) $\forall_{x,y\in X}\,\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\quad \rho'_\pm(x,\alpha x+y)=\alpha\|x\|^2+\rho'_\pm(x,y)$;
($\rho'_\pm 2$) $\forall_{x,y\in X}\,\forall_{\alpha\geqslant 0}\quad \rho'_\pm(\alpha x,y)=\alpha\rho'_\pm(x,y)=\rho'_\pm(x,\alpha y)$;
($\rho'_\pm 3$) $\forall_{x,y\in X}\,\forall_{\alpha<0}\quad \rho'_\pm(\alpha x,y)=\alpha\rho'_\mp(x,y)=\rho'_\pm(x,\alpha y)$;
($\rho'_\pm 4$) $\forall_{x\in X}\quad \rho'_\pm(x,x)=\|x\|^2$;
($\rho'_\pm 5$) $\forall_{x,y\in X}\quad |\rho'_\pm(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.

Ponadto, funkcjonały ρ'_+,ρ'_- są ciągłe ze względu na drugą zmienną, ale niekoniecznie ze względu na pierwszą. Załóżmy, że $[\cdot|\cdot]$ jest ustalonym semi-iloczynem skalarnym w rzeczywistej przestrzeni unormowanej X. Wtedy

$$\forall_{x,y\in X}\quad \rho'_-(x,y)\leqslant [y|x]\leqslant\rho'_+(x,y) \tag{3.1}$$

oraz

$$\forall_{x,y\in X}\quad \rho'_\pm(x,y)=\lim_{t\to 0^\pm}[y|x+ty].$$

Ponadto,

$$\forall_{x,y\in X}\quad \rho'_\pm(x,y)=\lim_{t\to 0}\rho'_\pm(x+ty,y). \tag{3.2}$$

Znany jest fakt, że przestrzeń X jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho'_\pm(x,y)=[y|x]$ dla wszystkich $x,y\in X$ i dla dowolnego semi-iloczynu skalarnego $[\cdot|\cdot]$ (zob. [22]).

Następujące odwzorowanie $\rho'\colon X\times X\to\mathbb{R}$ wprowadzono w pracy [36]:

$$\rho'(x,y):=\frac{1}{2}\left(\rho'_+(x,y)+\rho'_-(x,y)\right). \tag{3.3}$$

Powyższy funkcjonał ρ' nazywamy *M-semi-iloczynem skalarnym*[3]. Stosując wspomniane własności funkcjonałów ρ'_+,ρ'_-, otrzymujemy następujące warunki:

[2] Pojęcie gładkości przestrzeni w punkcie omówimy w dalszej części rozdziału.
[3] W niektórych pracach odwzorowanie to oznacza się symbolem $\langle\cdot|\cdot\rangle_g$, tzn. $\langle y|x\rangle_g=\rho'(x,y)$.

(ρ'1) $\forall_{x,y\in X}\ \forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\quad \rho'(x,\alpha x+y)=\alpha\|x\|^2+\rho'(x,y)$;
(ρ'2) $\forall_{x,y\in X}\ \forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\quad \rho'(\alpha x,y)=\alpha\rho'(x,y)=\rho'(x,\alpha y)$;
(ρ'3) $\forall_{x\in X}\quad \rho'(x,x)=\|x\|^2$;
(ρ'4) $\forall_{x,y\in X}\quad |\rho'(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.
Z własności (3.2) dostajemy

$$\forall_{x,y\in X}\quad \rho'(x,y)=\lim_{t\to 0}\rho'(x+ty,y). \tag{3.4}$$

Z równości (3.3) wynika, że funkcjonał ρ', podobnie jak dwa wcześniejsze ρ'_+,ρ'_-, również jest ciągły ze względu na drugą zmienną.

Funkcjonał ρ' nie musi być addytywny ze względu na drugą zmienną. Przestrzeń unormowaną X, w której $\rho'(x,\cdot)$ jest addytywne (a w konsekwencji $\rho'(x,\cdot)\in X^*$) dla każdego $x\in X\setminus\{0\}$, nazywamy *semi-gładką*. Oczywiście każda przestrzeń gładka jest również semi-gładka. Natomiast przestrzeń l^1 jest[4] semi-gładka, ale gładka już nie jest.

Teraz możemy rozważać kolejne trzy różne relacje ortogonalności. Podobnie jak wcześniej, definiujemy odpowiednio *ρ_+-ortogonalność* i *ρ_--ortogonalność*:

$$x\perp_{\rho_+}y\ :\Leftrightarrow\ \rho'_+(x,y)=0,\qquad\qquad x\perp_{\rho_-}y\ :\Leftrightarrow\ \rho'_-(x,y)=0,$$

oraz *ρ-ortogonalność*

$$x\perp_{\rho}y\quad :\Leftrightarrow\quad \rho'(x,y)=0.$$

Można sprawdzić, że w przypadku, gdy norma pochodzi od iloczynu skalarnego, (a wtedy przestrzeń jest gładka, więc istnieje dokładnie jeden semi-iloczyn skalarny $[\cdot|\cdot]$), to $\langle y|x\rangle=[y|x]=\rho'_+(x,y)=\rho'_-(x,y)=\rho'(x,y)$, a stąd także $\perp=\perp_s=\perp_{\rho_+}=\perp_{\rho_-}=\perp_\rho=\perp_B$. Natomiast w dowolnej, rzeczywistej przestrzeni unormowanej zawsze zachodzi $\perp_s,\perp_{\rho_+},\perp_{\rho_-},\perp_\rho\subset\perp_B$ (zob. [10], [14], [17], [19], [22]).

3.2 Przybliżona ortogonalność

W pracy [11] wprowadzono w przestrzeni unitarnej $(X,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ pojęcie przybliżonej prostopadłości. Niech $\varepsilon\in[0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Mówimy, że wektory $x,y\in X$ są *ε-ortogonalne* jeśli $|\langle x|y\rangle|\leqslant\varepsilon\|x\|\cdot\|y\|$. Również w przestrzeni unormowanej $(X,\|\cdot\|)$ możemy rozważać przybliżoną prostopadłość. W pracach [10], [14] zdefiniowano pojęcia odpowiednio *ε-B-ortogonalności*, oraz *ε-s-ortogonalności*:

$$x\perp^\varepsilon_B y\ :\Leftrightarrow\ \forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\ \|x\|^2\leqslant\|x+\lambda y\|^2+2\varepsilon\|x\|\cdot\|\lambda y\|; \tag{3.5}$$

$$x\perp^\varepsilon_s y\ :\Leftrightarrow\ |[y|x]|\leqslant\varepsilon\|x\|\cdot\|y\|;$$

Pojęcie *ε-J-ortogonalności* wprowadzono w pracy [16] na dwa - nierównoważne - sposoby:

$$x\perp^\varepsilon_J y\ :\Leftrightarrow\ \left|\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right|\leqslant 4\varepsilon\|x\|\cdot\|y\|;$$

$$x\,{}^\varepsilon\!\!\perp_J y\ :\Leftrightarrow\ \left|\,\|x+y\|-\|x-y\|\,\right|\leqslant\varepsilon\left(\|x+y\|+\|x-y\|\right). \tag{3.6}$$

Kolejne definicje odpowiednio *ε-ρ_+-ortogonalności*, *ε-ρ_--ortogonalności* oraz *ε-ρ-ortogonalności* pochodzą z pracy [17]:

[4] W [22, str.51] jest wzór $\rho'(x,y)=\|x\|_1\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{sgn}(x_k)y_k$ dla $x=(x_1,x_2,\ldots),y=(y_1,y_2,\ldots)\in l^1$, z którego łatwo widać, że $\rho'(x,\cdot)$ jest addytywne dla $x\in l^1$.

$$x\perp^{\varepsilon}_{\rho_+}y \;:\Leftrightarrow\; |\rho'_+(x,y)| \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|;$$

$$x\perp^{\varepsilon}_{\rho_-}y \;:\Leftrightarrow\; |\rho'_-(x,y)| \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|;$$

$$x\perp^{\varepsilon}_{\rho}y \;:\Leftrightarrow\; |\rho'(x,y)| \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|.$$

Łatwo widać, że dla normy pochodzącej od iloczynu skalarnego zachodzi $\perp^{\varepsilon} = \perp^{\varepsilon}_{B} = \perp^{\varepsilon}_{s}$, a w przypadku rzeczywistej przestrzeni unitarnej $\perp^{\varepsilon} = \perp^{\varepsilon}_{B} = \perp^{\varepsilon}_{s} = \perp^{\varepsilon}_{J} = \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} = \perp^{\varepsilon}_{\rho_-} = \perp^{\varepsilon}_{\rho}$. Natomiast w rzeczywistej przestrzeni unormowanej B-ortogonalność może być opisana funkcjonałami ρ'_-, ρ'_+ wg poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 [3], [22] *Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi*

$$x\perp_{B}y \;\Leftrightarrow\; \rho'_-(x,y) \leqslant 0 \leqslant \rho'_+(x,y).$$

Podamy teraz twierdzenie, które w podobny sposób wiąże relację $\perp^{\varepsilon}_{B}$ z funkcjonałami $\rho'_{\pm}$. W dowodzie tego twierdznia będzie potrzebny lemat dotyczący funkcji wypukłych. Oznaczmy literami I, J dowolne przedziały w $\mathbb{R}$ (ograniczone bądź nieograniczone).

Lemat 3.2 *Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą, $g\colon J \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą i niemalejącą. Jeżeli $f(I) \subset J$, to złożenie $g\circ f\colon I \to \mathbb{R}$ jest również funkcją wypukłą.*

Dowód: Niech $x, y \in I$ oraz ustalmy $\alpha, \beta \geqslant 0$ takie, że $\alpha + \beta = 1$. Wówczas stosując odpowiednio wypukłość f, g oraz monotoniczność funkcji g dostajemy $(g\circ f)(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) \leqslant g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \leqslant \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha(g\circ f)(x) + \beta(g\circ f)(y)$. ■

Twierdzenie 3.3 [19, Theorem 3.1] *Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną i niech $\varepsilon \in [0,1)$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi*

$$x\perp^{\varepsilon}_{B}y \;\Leftrightarrow\; \rho'_-(x,y) - \varepsilon\|x\|\cdot\|y\| \leqslant 0 \leqslant \rho'_+(x,y) + \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|. \tag{3.7}$$

Dowód: Najpierw wykażemy "$\Rightarrow$". Załóżmy, że $x\perp^{\varepsilon}_{B}y$. Wówczas zachodzi (3.5), a stąd $\forall_{\lambda>0}\; -\varepsilon\|x\|\cdot\|y\| \leqslant \frac{\|x+\lambda y\|^2 - \|x\|^2}{2\lambda}$. Gdy $\lambda \to 0^+$, to $-\varepsilon\|x\|\cdot\|y\| \leqslant \rho'_+(x,y)$. Podobną metodą dla $\lambda < 0$ otrzymamy $\rho'_-(x,y) \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|$.

Uzasadnimy teraz "$\Leftarrow$". Jeśli $x = 0$ lub $y = 0$, to implikacja jest prawdziwa, więc załóżmy teraz, że $x \neq 0 \neq y$. Z nierówności $\rho'_-(x,y) \leqslant \varepsilon\|x\|\cdot\|y\|$ dostajemy

$$2\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \leqslant 2\varepsilon\|x\|\cdot\|y\|.$$

Jeśli teraz ustalimy dowolne $\gamma \in (0,1)$, to dostaniemy nierówność

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{t} < 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|y\|.$$

Wtedy istnieje stała $\delta_1 < 0$ taka, że

$$\forall_{t\in[\delta_1,0)}\quad \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{t} < 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|y\|.$$

Powyższy warunek jest równoważny warunkowi

$$\forall_{t\in[\delta_1,0)} \quad \frac{\|x\|^2 - \|x+ty\|^2}{-t} < 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|y\|,$$

a stąd otrzymujemy

$$\forall_{t\in[\delta_1,0)} \quad \|x\|^2 < \|x+ty\|^2 + 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|ty\|, \tag{3.8}$$

Z nierówności $-\varepsilon\|x\|\cdot\|y\| \leqslant \rho'_+(x,y)$ otrzymujemy

$$-2\varepsilon\|x\|\cdot\|y\| \leqslant 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{2t}.$$

Z powyższej nierówności wynika, że dla tej liczby γ ustalonej wcześniej, zachodzi również

$$-2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|y\| < \lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{t},$$

zatem istnieje stała $\delta_2 > 0$ taka, że

$$\forall_{t\in(0,\delta_2]} \quad -2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|y\| < \frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{t}$$

a po przekształceniu dostajemy

$$\forall_{t\in(0,\delta_2]} \quad \|x\|^2 < \|x+ty\|^2 + 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|ty\|. \tag{3.9}$$

Zdefiniujmy funkcję $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem $\varphi(t) := \|x+ty\|^2 + 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|ty\|$. Funkcja φ jest wypukła. Istotnie, aby to uzasadnić, rozważmy funkcję $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem $f(t) := \|x+ty\|$ oraz $g\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określoną jako $g(t) := t^2$. Ponadto niech $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie zdefiniowana przez $h(t) := 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|ty\|$. Każda z tych funkcji jest wypukła, a dodatkowo f, g spełniają założenia lematu 3.2, zatem $g\circ f$ jest wypukła. Jak wiadomo, suma funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą. Ponadto, $\varphi(t) = (g\circ f)(t) + h(t)$ dla $t\in\mathbb{R}$, zatem φ również jest funkcją wypukłą.

Zauważmy, że warunki (3.8) oraz (3.9) dostarczają $\varphi(0) = \min\{\varphi(t) : t\in[\delta_1,\delta_2]\}$. Skoro w zerze jest minimum funkcji φ na przedziale $[\delta_1,\delta_2]$ oraz funkcja ta jest wypukła na zbiorze $\mathbb{R}$, to wówczas $\varphi(0)=\min\{\varphi(t): t\in\mathbb{R}\}$. Stąd otrzymaliśmy następujący warunek

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \quad \|x\|^2 \leqslant \|x+ty\|^2 + 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|ty\|. \tag{3.10}$$

Ustalmy dowolnie $\lambda\neq 0$. Z (3.10) otrzymujemy

$$\|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2 + 2(\varepsilon+\gamma)\|x\|\cdot\|\lambda y\|. \tag{3.11}$$

Skoro liczba γ była dowolnie ustalona w przedziale $(0,1)$, to przechodząc w nierówności (3.11) do granicy gdy $\gamma\to 0^+$, dostaniemy

$$\|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2 + 2\varepsilon\|x\|\cdot\|\lambda y\|. \tag{3.12}$$

Oczywiście nierówność (3.12) zachodzi także w przypadku $\lambda = 0$, a zatem pokazaliśmy ostatecznie, że $\forall_{\lambda\in\mathbb{R}} \ \|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2 + 2\varepsilon\|x\|\cdot\|\lambda y\|$, więc $x\perp^{\varepsilon}_{B} y$. ■

Przyjmując $\varepsilon = 0$ dostajemy z powyższego twierdzenia jako wniosek twierdzenie 3.1.

3.3 Charakteryzacja gładkości normy przy pomocy relacji ortogonalności

Przedstawimy teraz zależności pomiędzy zdefiniowanymi relacjami przybliżonej ortogonalności. Później omówimy warunki równoważne gładkości w przestrzeni unormowanej.

Definicja 3.4 Mówimy, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest *gładka w punkcie* $x_o \in X \setminus \{0\}$ jeśli istnieje dokładnie jeden funkcjonał $x^* \in X^*$ taki, że $x^*(x_o) = \|x_o\|$ oraz $\|x^*\| = 1$. Ponadto, zbiór wszystkich punktów gładkości oznaczamy przez

$$D_{sm}(X) := \{x \in X \ : \ X \textit{ jest gładka w } x\} \cup \{0\}.$$

Mówimy, że X jest *gładka,* jeśli jest gładka w każdym punkcie $x \in X$, tzn. gdy $D_{sm}(X) = X$.

Następnie podajemy warunki równoważne gładkości przestrzeni w punkcie (zob. [3], [22]).

Twierdzenie 3.5 *Przypuśćmy, że* $(X, \|\cdot\|)$ *jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną oraz* $x_o \in X \setminus \{0\}$ *jest ustalonym punktem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(1) *przestrzeń* X *jest gładka w punkcie* x_o*;*
(2) *norma* $\|\cdot\|$ *jest różniczkowalna w sensie Gâteaux*[5] *w punkcie* x_o*;*
(3) $\forall_{y \in X} \quad \rho'_-(x_o, y) = \rho'_+(x_o, y)$*;*
(4) *funkcjonał* $\rho'_+(x_o, \cdot)$ *jest liniowy;*
(5) *funkcjonał* $\rho'_-(x_o, \cdot)$ *jest liniowy;*
(6) *przestrzeń* X *jest gładka w punkcie* αx_o *dla wszystkich* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Omówimy, jeszcze kształt zbioru $D_{sm}(X)$.

Definicja 3.6 *Zbiór* $S \subset X$ *nazywamy gwiaździstym*[6]*, gdy* $\forall_{x \in S} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} : \alpha x \in S$.

Aby uzasadnić, że zbiór $D_{sm}(X)$ jest zazwyczaj bardzo duży, musimy wcześniej przypomnieć następujące twierdzenie Mazura.

Twierdzenie 3.7 [34], [41, str.12] *Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, a* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *będzie ciągłą i wypukłą funkcją określoną na wypukłym, otwartym zbiorze* $U \subset X$*. Wtedy* f *jest różniczkowalna w sensie Gâteaux na pewnym gęstym zbiorze* $D \subset U$ *typu* G_δ.

Ponadto, zachodzi jeszcze następujący rezultat, który podobnie jak powyższy, również pomoże opisać rozmiary zbioru $D_{sm}(X)$.

---

[5] Funkcję $f\colon X \to Y$ odwzorowująca przestrzeń unormowaną X w przestrzeń unormowaną Y nazywamy *różniczkowalną w sensie Gâteaux w punkcie* $x_o \in X$, jeżeli istnieje liniowy i ciągły operator $A\colon X \to Y$ taki, że dla każdego $w \in X$ zachodzi równość $Aw = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_o + tw) - f(x_o)}{t}$.

[6] Warto w tym miejscu przypomnieć, że w literaturze matematycznej przyjęto następującą definicję: podzbiór A przestrzeni wektorowej V nazywamy *gwiaździstym względem punktu* $a \in A$, gdy dla dowolnego $x \in A$ oraz $t \in [0, 1]$ zachodzi $(1 - t)a + tx \in A$. Pojęcia, gwiaździstość wg definicji 3.6 i gwiaździstość względem punktu, nie są równoważne. Jeśli zbiór jest gwiaździsty, to jest gwiaździsty względem wektora zerowego. Natomiast zbiór $A := \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ jest gwiaździsty względem punktu $(0, 0)$, ale nie jest gwiaździsty wg definicji 3.6. Dla wygody w redagowaniu, przyjęto w rozprawie definicję 3.6.

Twierdzenie 3.8 [3, str.24], [4], [23] *Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną. Wtedy istnieje zbiór $F \subset X$, który ma miarę Lebesgue'a równą zero (wtedy $X \setminus F$ jest gęsty) oraz dla $x \in X \setminus F$, $y \in X$ zachodzi równość $\rho'_+(x,y) = \rho'_-(x,y)$.*

Oczywiście norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, więc z twierdzenia Mazura oraz z twierdzeń 3.5, 3.7 oraz 3.8 dostajemy poniższy wynik:

Twierdzenie 3.9 *Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha, to wówczas zbiór $D_{sm}(X)$ jest gęsty i gwiaździsty. Nadto, jeśli X jest skończenie wymiarową przestrzenią, to wówczas $X \setminus D_{sm}(X)$ jest zbiorem miary zero.*

Łatwo otrzymujemy z twierdzenia 3.1 oraz z nierówności[7] $\rho'_- \leqslant \rho'_+$ następujące inkluzje $\perp_{\rho_+} \subset \perp_B$, $\perp_{\rho_-} \subset \perp_B$. Podobny rezultat jest prawdziwy dla przybliżonych ortogonalności.

Twierdzenie 3.10 [19, Theorem 3.2] *Niech $\varepsilon \in [0,1)$. Wtedy w dowolnej, rzeczywistej przestrzeni unormowanej zachodzą inkluzje*

$$\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \subset \perp^{\varepsilon}_B, \qquad \perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \subset \perp^{\varepsilon}_B, \qquad \perp^{\varepsilon}_{\rho} \subset \perp^{\varepsilon}_B.$$

Dowód: Załóżmy, że $x \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} y$. Z nierówności $-\varepsilon\|x\| \cdot \|y\| \leqslant \rho'_+(x,y) \leqslant \varepsilon\|x\| \cdot \|y\|$ oraz z nierówności[8] $\rho'_- \leqslant \rho'_+$ mamy $\rho'_-(x,y) \leqslant \varepsilon\|x\| \cdot \|y\|$ oraz $-\varepsilon\|x\| \cdot \|y\| \leqslant \rho'_+(x,y)$. Następnie z twierdzenia 3.3 otrzymujemy $x \perp^{\varepsilon}_B y$. Podobnie dowodzi się $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \subset \perp^{\varepsilon}_B$.

Uzasadnimy jeszcze ostatnią inkluzję (por. [17, Theorem 3], gdzie jest inny dowód). Niech $x \perp^{\varepsilon}_{\rho} y$. Wtedy otrzymujemy $-\varepsilon\|x\| \cdot \|y\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\rho'_-(x,y) + \rho'_+(x,y)\right) \leqslant \varepsilon\|x\| \cdot \|y\|$. Stąd i z nierówności $\rho'_- \leqslant \rho'_+$ dostajemy $\frac{1}{2}\left(\rho'_-(x,y) + \rho'_-(x,y)\right) \leqslant \varepsilon\|x\| \cdot \|y\|$ jak również $-\varepsilon\|x\| \cdot \|y\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\rho'_+(x,y) + \rho'_+(x,y)\right)$. Stosując równoważność (3.7) mamy $x \perp^{\varepsilon}_B y$. ■

Inkluzje odwrotne są prawdziwe w przestrzeniach gładkich. Ponadto, okazuje się, że każda z inkluzji odwrotnych jest równoważna gładkości przestrzeni.

Twierdzenie 3.11 *Załóżmy, że X jest rzeczywistą, unormowaną przestrzenią. Niech $\varepsilon \in [0,1)$ oraz niech $[\cdot|\cdot] : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ustalonym semi-iloczynem skalarnym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \subset \perp^{\varepsilon}_{\rho_-}$	(b) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \supset \perp^{\varepsilon}_{\rho_-}$	(c) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} = \perp^{\varepsilon}_{\rho_-}$
(d) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \subset \perp^{\varepsilon}_{\rho}$	(e) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \supset \perp^{\varepsilon}_{\rho}$	(f) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} = \perp^{\varepsilon}_{\rho}$
(g) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \subset \perp^{\varepsilon}_{\rho}$	(h) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \supset \perp^{\varepsilon}_{\rho}$	(i) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} = \perp^{\varepsilon}_{\rho}$
(j) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \subset \perp^{\varepsilon}_{s}$	(k) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \supset \perp^{\varepsilon}_{s}$	(l) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} = \perp^{\varepsilon}_{s}$
(m) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \subset \perp^{\varepsilon}_{s}$	(n) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} \supset \perp^{\varepsilon}_{s}$	(o) $\perp^{\varepsilon}_{\rho_-} = \perp^{\varepsilon}_{s}$
(p) $\rho'_+ = \rho'_-$	(r) $\rho'_+(\cdot,\diamond) = [\diamond|\cdot]$	(s) $\rho'_-(\cdot,\diamond) = [\diamond|\cdot]$
(t) *X jest gładka.*		

Dowód: W pracy [19] wykazano (a) $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (p) $\Leftrightarrow$ (t). Podamy tutaj inne dowody tych równoważności. Równoważność (p) $\Leftrightarrow$ (t) wynika z warunku (3) w twierdzeniu 3.5. Implikacje (r) $\Rightarrow$ (l) $\Rightarrow$ (j) są oczywiste. Teraz udowodnimy (j) $\Rightarrow$ (r). Niech $x, y \in S(X)$. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\rho'_+(x,y) = -\varepsilon$. Wówczas $x \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} y$, a z zakładanego punktu (j) mamy też $x \perp^{\varepsilon}_{s} y$, czyli $|\,[y|x]\,| \leqslant \varepsilon$. Stąd oraz z warunku (3.1) wyprowadzamy

[7] zob. własność (3.1)
[8] zob. własność (3.1)

$$-\varepsilon \leqslant [y|x] \leqslant \rho'_+(x,y) = -\varepsilon,$$

czyli $\rho'_+(x,y) = [y|x]$. Teraz rozpatrzmy przypadek, gdy wektory $x, y \in S(X)$ są liniowo niezależne i spełniają nierówność $\rho'_+(x,y) < -\varepsilon$. Zdefiniujmy następnie dwie funkcje: $\gamma\colon [0,1] \to S(X)$, $\gamma(t) := \frac{tx+(1-t)y}{\|tx+(1-t)y\|}$ oraz $\vartheta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\vartheta(t) := \rho'_+(x, \gamma(t))$. Zauważmy, że $\vartheta(0) < -\varepsilon$, $\vartheta(1) = 1$. Funkcja ϑ, jako ciągła[9], ma własność Darboux, zatem istnieje $t_o \in (0,1)$ takie, że $\vartheta(t_o) = -\varepsilon$. Definiując

$$z := \frac{t_o x+(1-t_o)y}{\|t_o x+(1-t_o)y\|}, \quad \alpha := \frac{t_o}{\|t_o x+(1-t_o)y\|}, \quad \beta := \frac{1-t_o}{\|t_o x+(1-t_o)y\|},$$

dostajemy $z = \alpha x + \beta y$, $\beta > 0$ oraz $\rho'_+(x,z) = -\varepsilon$, więc $x \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} z$. Z założonego (j) dostajemy $x \perp^{\varepsilon}_{s} z$, a zatem $-\varepsilon \leqslant [z|x] \leqslant \varepsilon$. Skoro $\rho'_+(x,z) = -\varepsilon$ oraz

$$[\diamond|\cdot] \leqslant \rho'_+(\cdot,\diamond), \tag{3.13}$$

to także $[z|x] = -\varepsilon$, czyli $\rho'_+(x,z) = [z|x]$. Stąd mamy więc

$$\rho'_+(x,y) = \rho'_+\left(x, -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{1}{\beta}z\right) \overset{(\rho'_\pm 1)}{=} -\frac{\alpha}{\beta}\|x\|^2 + \rho'_+\left(x, \frac{1}{\beta}z\right) \overset{(\rho'_\pm 2)}{=} -\frac{\alpha}{\beta}\|x\|^2 + \frac{1}{\beta}\rho'_+(x,z) = \tag{3.14}$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta}\|x\|^2 + \frac{1}{\beta}[z|x] \overset{(\text{sis1})}{=} \left[-\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{1}{\beta}z \Big| x\right] = [y|x]. \tag{3.15}$$

W przypadku $\rho'_+(x,y) > -\varepsilon$ określamy następujące funkcje: $\gamma\colon [0,1] \to S(X)$ przez $\gamma(t) := \frac{t(-x)+(1-t)y}{\|t(-x)+(1-t)y\|}$ oraz $\vartheta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem $\vartheta(t) := \rho'_+(x, \gamma(t))$. Wówczas $\vartheta(0) > -\varepsilon$, $\vartheta(1) = -1$. Ponownie z własności Darboux otrzymujemy pewne $t_o \in (0,1)$, dla którego $\vartheta(t_o) = -\varepsilon$. Dalej dowód przebiega podobnie.

Założyliśmy, że wektory x, y wybrane ze sfery jednostkowej są liniowo niezależne. Gdyby były zależne, to wtedy $x = \pm y$. Stąd $\rho'_+(x,y) = \rho'_+(\pm y, y) = \pm\|y\|^2 = [y| \pm y] = [y|x]$.

Pokazaliśmy dopiero równość funkcjonałów $\rho'_+(\cdot,\diamond)$, $[\diamond|\cdot]$ na wektorach ze sfery jednostkowej. Jeżeli teraz $a, b \in X \setminus \{0\}$, to z własności $(\rho'_\pm 2)$, (sis1) oraz (sis2) dostajemy

$$\rho'_+(a,b) = \|a\|\cdot\|b\|\rho'_+\left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}\right) = \|a\|\cdot\|b\| \left[\frac{b}{\|b\|} \Big| \frac{a}{\|a\|}\right] = [b|a], \tag{3.16}$$

zatem (j)$\Rightarrow$(r) jest już wykazane.

Implikacja (t) $\Rightarrow$ (r) wynika, z własności (3.1) i warunku (3) z twierdzenia 3.5. Aby wykazać (r) $\Rightarrow$ (t) załóżmy $\rho'_+(\cdot,\diamond) = [\diamond|\cdot]$. Wtedy z własności (sis1) wynika, że dla każdego $x \in X \setminus \{0\}$ funkcjonał $\rho'_+(x,\diamond)$ jest liniowy. Zatem z warunku (4) ponownie z twierdzenia 3.5 dostajemy gładkość w x, czyli X jest gładka w każdym punkcie.

W ten sposób mamy już wykazane równoważności (j) $\Leftrightarrow$ (l) $\Leftrightarrow$ (p) $\Leftrightarrow$ (r) $\Leftrightarrow$ (t). Bardzo podobnie wykazujemy (k) $\Leftrightarrow$ (l) $\Leftrightarrow$ (p) $\Leftrightarrow$ (r) $\Leftrightarrow$ (t), (m) $\Leftrightarrow$ (o) $\Leftrightarrow$ (p) $\Leftrightarrow$ (s) $\Leftrightarrow$ (t) oraz (n) $\Leftrightarrow$ (o) $\Leftrightarrow$ (p) $\Leftrightarrow$ (s) $\Leftrightarrow$ (t).

Postępując podobnie jak w dowodzie implikacji (j) $\Rightarrow$ (r), możemy otrzymać (a) $\Rightarrow$ (p), (d) $\Rightarrow$ (p), (g) $\Rightarrow$ (p) oraz (b) $\Rightarrow$ (p), (e) $\Rightarrow$ (p), (h) $\Rightarrow$ (p). Należy wtedy zamiast (3.13) zastosować odpowiednio jedną z nierówności $\rho'_- \leqslant \rho' \leqslant \rho'_+$, a zamiast własności (sis1),

[9] Funkcja ϑ jest ciągła, bo γ jest ciągła oraz funkcja ρ'_+ jest ciągła ze względu na drugą zmienną (zob. własności funkcjonałów ρ'_-, ρ'_+ w podrozdziale 3.1).

$(\rho'_\pm 1)$, $(\rho'_\pm 2)$ w (3.14) oraz (3.15), trzeba w odpowiedniej kolejności zastosować $(\rho'_\pm 1)$, $(\rho'_\pm 2)$, $(\rho' 1)$ lub $(\rho' 2)$. Ponadto, zamiast własności $(\rho'_\pm 2)$, (sis1), (sis2) w (3.16) należy we właściwy sposób zastosować $(\rho'_\pm 2)$ lub $(\rho' 2)$.

Implikacje (p) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a), (p) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b),a także (p) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (d), (p) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (e) oraz (p) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (g), (p) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (h) są oczywiste, zatem dowód twierdzenia jest zakończony. ■

W pracy [19] znajduje się również twierdzenie charakteryzujące semi-gładkość.

Twierdzenie 3.12 [19, Theorem 3.5] *Załóżmy, że X jest rzeczywistą, przestrzenią unormowaną. Niech $\varepsilon \in [0,1)$ oraz niech $[\cdot|\cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ będzie ustalonym semi-iloczynem skalarnym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) $\perp^\varepsilon_\rho \subset \perp^\varepsilon_s$;
(b) $\perp^\varepsilon_\rho \supset \perp^\varepsilon_s$;
(c) $\perp^\varepsilon_\rho = \perp^\varepsilon_s$;
(d) $\rho'(\cdot,\diamond) = [\diamond|\cdot]$.

Ponadto każdy z powyższych warunków implikuje semi-gładkość.

Dowód: Wpierw wykażemy (a)$\Rightarrow$(d). Ustalmy liniowo niezależne wektory $x, y \in X$ tak aby $\|x\| = \|y\| = 1$. Podobnymi metodami jak w dowodzie implikacji (j)$\Rightarrow$(r) z twierdzenia 3.11 otrzymamy wektor $z \in \mathrm{Lin}\{x,y\}$ taki, że $\|z\| = 1$ i $\rho'(x,z) = -\varepsilon$ (stąd x oraz z muszą być liniowo niezależne). Zdefiniujmy funkcje $\mu, \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorami:

$$\mu(t) := \rho'\left(x, \frac{(1-t)z+tx}{\|(1-t)z+tx\|}\right); \qquad \gamma(t) := \left[\frac{(1-t)z+tx}{\|(1-t)z+tx\|}|x\right].$$

Każda z nich jest ciągła. Zauważmy, że $\mu(0) = -\varepsilon$ oraz $\mu(1) = 1$, więc z własności Darboux wynika, że dla pewnego $t_1 \in (0,1)$ mamy $\mu(t_1) = \varepsilon$. Skoro $x \perp^\varepsilon_\rho z$ oraz $x \perp^\varepsilon_\rho \frac{(1-t_1)z+t_1x}{\|(1-t_1)z+t_1x\|}$, to z inkluzji $\perp^\varepsilon_\rho \subset \perp^\varepsilon_s$ otrzymujemy $x \perp^\varepsilon_s z$ jak również $x \perp^\varepsilon_s \frac{(1-t_1)z+t_1x}{\|(1-t_1)z+t_1x\|}$. W konsekwencji

$$\mu(0) \leqslant \gamma(0) \quad \text{oraz} \quad \mu(t_1) \geqslant \gamma(t_1).$$

Lemat 1.19 dostarcza równość $\mu(t_o) = \gamma(t_o)$ dla pewnego $t_o \in [0, t_1]$. Zatem dla wektora $w := \frac{(1-t_o)z+t_ox}{\|(1-t_o)z+t_ox\|}$ dostajemy $\rho'(x,w) = [w|x]$. Łatwo można zauważyć, że $w \in \mathrm{Lin}\{x,y\}$ oraz $\|w\| = 1$. Ponadto, x, w są liniowo niezależne[10], zatem dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ możemy zapisać $y = \alpha x + \beta w$. Stosując równość $\rho'(x,w) = [w|x]$, możemy wyprowadzić

$$\begin{aligned}\rho'(x,y) &= \rho'(x, \alpha x + \beta w) \overset{(\rho' 1)}{=} \alpha\rho'(x,x) + \rho'(x,\beta w) \overset{(\rho' 2)}{=} \alpha\rho'(x,x) + \beta\rho'(x,w) = \\ &= \alpha\,[x|x] + \beta\,[w|x] \overset{\text{(sis1)}}{=} [\alpha x + \beta w|x] = [y|x]\,.\end{aligned}$$

Wykazaliśmy równość funkcjonałów ρ' oraz $[\cdot|\cdot]$ dla liniowo niezależnych wektorów z $S(X)$. Załóżmy teraz, że x, y są liniowo zależne (niekoniecznie ze sfery jednostkowej). Gdy $y = \alpha x$, to $\rho'(x,y) = \alpha\|x\|^2 = [y|x]$. Teraz z kolei niech x, y są dowolnymi wektorami liniowo niezależnymi. Wtedy z $(\rho' 2)$ oraz (sis1), (sis2) mamy

$$\rho'(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|\rho'\left(\tfrac{x}{\|x\|}, \tfrac{y}{\|y\|}\right) = \|x\|\cdot\|y\|\left[\tfrac{y}{\|y\|}|\tfrac{x}{\|x\|}\right] = [y|x].$$

---

[10]Gdyby x, w były liniowo zależne, to x, z też byłyby liniowo zależne, a nie są.

więc $\rho' = [\cdot|\cdot]$. Podobnie dowodzimy (b)$\Rightarrow$(d). Pozostałe implikacje są oczywiste.

Do zakończenie dowodu wystarczy jeszcze wykazać, że np. warunek (d) implikuje semi-gładkość. Z uwagi na (sis1), dla każdego $x \in X$ funkcjonał $[\diamond|x]$ jest liniowy. Zatem jeśli zachodzi równość $\rho'(\cdot,\diamond) = [\diamond|\cdot]$, to również funkcjonał $\rho'(x,\diamond)$ musi być liniowy. ■

Można teraz zadać pytanie, czy cztery warunki z powyższego twierdzenia nie są równoważne warunkom z twierdzenia 3.11. Okazuje się, że nie. Przykładem jest wspomniana już przestrzeń l^1. Wtedy funkcjonał $[\diamond|\cdot]_\rho := \rho'(\cdot,\diamond)$ jest semi-iloczynem skalarnym. Warunki (a), (b), (c), (d) są spełnione, jednakże przestrzeń l^1 nie jest gładka. Warto więc w tym miejscu zwrócić uwagę na to, dlaczego nie można warunków (a), (b), (c), (d) dołączyć do tych w twierdzeniu 3.11. Powodem jest porównywalność funkcjonałów $\rho'_\pm$, $[\cdot|\cdot]$, mianowicie, $\rho'_-(\cdot,\diamond) \leqslant [\diamond|\cdot] \leqslant \rho'_+(\cdot,\diamond)$, natomiast $\rho'(\cdot,\diamond)$, $[\diamond|\cdot]$ nie są porównywalne (jeżeli $\rho'(\cdot,\diamond)$, $[\diamond|\cdot]$ są porównywalne, to są równe[11]).

Kolejne narzucające się pytanie brzmi: czy prawdziwy jest odwrotny rezultat do twierdzenia 3.12, tzn. czy semi-gładkość implikuje któryś z tych czterech (a zatem wszystkie) warunków? Odpowiedź jest również negatywna. Stosownym przykładem jest ponownie przestrzeń l^1, która jest semi-gładka. Ponieważ nie jest gładka, więc można znaleźć dwa różne semi-iloczyny skalarne, z których przynajmniej jeden jest różny od funkcjonału ρ'. Stąd warunek (d) z twierdzenia 3.12 nie zachodzi, a w konsekwencji wszystkie pozostałe także nie.

Udowodniono w pracy [10, Proposition 3.1], że zawsze $\perp^\varepsilon_s \subset \perp^\varepsilon_B$, a w przypadku przestrzeni gładkiej jest również $\perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_s$ (zob. [10, Proposition 3.2]). Podano tam również przykład przestrzeni niegładkiej (zob. [10, Example 3.1]), w której $\perp^\varepsilon_B \not\subset \perp^\varepsilon_s$. Pokażemy za chwilę, że inkluzja $\perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_s$ powoduje gładkość przestrzeni. Dowód dla $\varepsilon = 0$ można znaleźć w [22, str.155,157].

Twierdzenie 3.13 *Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Wówczas każdy z poniższych warunków*

$$\text{(a) } \perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_{\rho_+}; \qquad \text{(b) } \perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_{\rho_-}; \qquad \text{(c) } \perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_{\rho}; \qquad \text{(d) } \perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_s;$$

implikuje gładkość przestrzeni X.

Dowód: Wykażemy, że z inkluzji (d) wynika gładkość. Załóżmy, że $\perp^\varepsilon_B \subset \perp^\varepsilon_s$. Z twierdzenia 3.10 mamy $\perp^\varepsilon_{\rho_+} \subset \perp^\varepsilon_B$, zatem $\perp^\varepsilon_{\rho_+} \subset \perp^\varepsilon_s$. Stosując teraz warunek (j) z twierdzenia 3.11 otrzymujemy tezę.

Uzasadnienie dla (a), (b), (c) przebiega podobnie. Należy zastosować najpierw twierdzenie 3.10, a później odpowiedni warunek z twierdzenia 3.11. ■

[11] Jeśli np. $\rho'(\cdot,\diamond) \leqslant [\diamond|\cdot]$, to dla każdego x, y jest $\rho'(x,y) \leqslant [y|x]$ oraz $\rho'(-x,y) \leqslant [y|-x]$, a stąd i z własności (sis2), (ρ'2) mamy $\rho'(x,y) \geqslant [y|x]$, czyli $\rho'(x,y) = [y|x]$.

Rozdział 4

Operatory zachowujące ortogonalność w przestrzeniach unormowanych

Badania dotyczące operatorów zachowujących, lub prawie zachowujących B-ortogonalność, były prowadzone odpowiednio w pracach [28], [9] oraz [14], [38]. Wyniki badań w kontekście zachowywania lub prawie zachowywania J-ortogonalności zostały zawarte w pracy [16]. Wiele rezultatów, w zakresie tematyki stabilności własności zachowywania ortogonalności przez operatory, znajduje się w przeglądowej pracy [18].

W tym rozdziale skoncentrujemy naszą uwagę na operatorach prawie zachowujących $\rho_\pm, \rho$-ortogonalność oraz na zagadnieniu stabilności. W ten sposób niektóre rozważania prowadzone w drugim rozdziale „przeniesiemy" na przypadek rzeczywistych przestrzeni unormowanych. Będziemy rozważali odwzorowania liniowe prawie zachowujące te relacje ortogonalności, które zdefiniowaliśmy w rozdziale trzecim. Poniższy rozdział kontynuuje tematy z prac [17] oraz [19].

4.1 Operatory zachowujące ortogonalność

Drugi rozdział poświęcony był operatorom zachowującym ortogonalność w przestrzeniach unitarnych. Możemy również określić operatory zachowujące ortogonalność w przestrzeniach unormowanych, jeśli wcześniej zdefiniujemy ortogonalność jednym ze sposobów, podanych w poprzednim rozdziale. Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi. Podamy definicję operatora zachowującego jedną z ortogonalności.

Definicja 4.1 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *zachowuje ρ_+-ortogonalność,* jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X} : \ x\perp_{\rho_+} y \ \Rightarrow \ fx \perp_{\rho_+} fy.$$

Podobnie definiujemy operatory zachowujące *ρ_--ortogonalność* (albo *ρ-ortogonalność* albo *B-ortogonalność*).

Twierdzenie, które teraz zaprezentujemy, opisuje operatory zachowujące ρ_+, ρ_-, ρ-ortogonalność. Orzeka ono między innymi, że takie odwzorowania muszą być podobieństwami.

Twierdzenie 4.2 [17, Theorem 5], [48, Theorem 4.2] *Załóżmy, że X, Y są rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, a $f\colon X \to Y$ jest niezerowym liniowym odwzorowaniem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) *f zachowuje ρ_+-ortogonalność;*
(b) *f zachowuje ρ_--ortogonalność;*
(c) *f zachowuje ρ-ortogonalność;*
(d) $\forall_{x\in X}:\ \|fx\| = \|f\|\cdot\|x\|$;
(e) $\forall_{x\in X}:\ \rho'_+(fx, fy) = \|f\|^2\cdot\rho'_+(x,y)$;
(f) $\forall_{x\in X}:\ \rho'_-(fx, fy) = \|f\|^2\cdot\rho'_-(x,y)$;
(g) $\forall_{x\in X}:\ \rho'(fx, fy) = \|f\|^2\cdot\rho'(x,y)$.

W pracy [17] udowodniono równoważności (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(d)$\Leftrightarrow$(e)$\Leftrightarrow$(f)$\Leftrightarrow$(g). Natomiast, w pracy [48] wykazano, że warunek (c) jest równoważny każdemu z pozostałych.
Dowód: Równoważność (e)$\Leftrightarrow$(f) łatwo dowodzimy z własności ($\rho'_\pm 3$). Z równoważności (e)$\Leftrightarrow$(f) wnosimy jednocześnie (e)$\Rightarrow$(g) oraz (f)$\Rightarrow$(g). Oczywiście (e)$\Rightarrow$(a), (f)$\Rightarrow$(b), (g)$\Rightarrow$(c) oraz każdy z warunków (e), (f), (g) implikuje warunek (d). Dowodów implikacji (a)$\Rightarrow$(d), (b)$\Rightarrow$(d) oraz (c)$\Rightarrow$(d), które znajdują się odpowiednio w [17], [48], nie będziemy tu przytaczać. Implikacje te uzyskamy jako wniosek z twierdzenia 4.12 z następnego podrozdziału. Zatem do zakończenia dowodu wystarczy uzasadnić implikację (d)$\Rightarrow$(e). Załóżmy, że dla $x \in X$ zachodzi równość $\|fx\| = \|f\|\cdot\|x\|$. Stąd oraz z definicji ρ'_+ jest $\rho'_+(fx,fy) = \|fx\|\cdot\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\|fx+tfy\|-\|fx\|}{t} = \|f\|\cdot\|x\|\cdot\lim\limits_{t\to 0^+}\|f\|\cdot\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} = \|f\|^2\cdot\rho'_+(x,y)$. ■

W pracy [28] wykazano, że operatory (określone pomiędzy rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi) zachowujące B-ortogonalność muszą być podobieństwami. Wynik obejmujący zarówno przypadek rzeczywisty jak i zespolony uzyskano później w [9].

Twierdzenie 4.3 [9], [28] *Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, i załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest niezerowym, operatorem liniowym. Wówczas f zachowuje B-ortogonalność wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x\in X}:\ \|fx\| = \|f\|\cdot\|x\|$.*

4.2 Operatory prawie zachowujące ortogonalność

W poprzednim podrozdziale przypomnieliśmy, że operatory zachowujące ρ_+-ortogonalność w przestrzeniach unormowanych są podobieństwami. W tym podrozdziale podamy podobne twierdzenie, opisujące operatory ε-prawie zachowujące ρ_+-ortogonalność. Mianowicie wykażemy, że jeśli operator ε-prawie zachowuje ρ_+-ortogonalność, to musi być prawie podobieństwem. Ustalmy liczbę $\varepsilon \in [0,1)$.

Definicja 4.4 Mówimy, że operator $f\colon X \to Y$ *ε-prawie zachowuje ρ_+-ortogonalność* jeśli spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X}:\ x\perp_{\rho_+} y \ \Rightarrow\ fx\perp^{\varepsilon}_{\rho_+} fy$$

Podobnie definiujemy operatory *ε-prawie zachowujące ρ_--ortogonalność* (albo *ρ-ortogonalność* albo *B-ortogonalność*)

Oczywiście te definicje są szczególnym przypadkiem definicji 2.6.

Definicja 4.5 Niech $\eta \in [0,1)$. Jeśli operator $f\colon X \to Y$ spełnia warunek

$$\forall_{x\in X}:\ (1-\eta)\,\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|,$$

to powiemy, że f jest *η-prawie podobieństwem* (lub w skrócie *η-podobieństwem*).

Przykład 4.6 Operator $f\colon H\to H$ (gdzie H jest przestrzenią Hilberta), ε-prawie zachowujący ortogonalność jest η-podobieństwem, gdzie $\eta = 1-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ (por. twierdzenie 2.22). Niech X, Y będą dowolnymi przestrzeniami unormowanymi oraz załóżmy, że operator $f\colon X\to Y$ jest ograniczony z góry i z dołu. Zdefiniujmy liczbę $\eta := 1-\frac{[f]}{\|f\|}$. Wówczas

$$(1-\eta)\|f\|\cdot\|x\| = \left(1-\left(1-\frac{[f]}{\|f\|}\right)\right)\|f\|\cdot\|x\| = [f]\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|,$$

zatem każdy ograniczony z góry i z dołu operator f jest η-podobieństwem z $\eta := 1-\frac{[f]}{\|f\|}$.

Następujące twierdzenie z pracy [38] orzeka, że operator ε-prawie zachowujący B-ortogonalność jest również 8ε-prawie podobieństwem.

Twierdzenie 4.7 [38, Theorem 3.5] *Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi i niech $\varepsilon\in\left[0,\frac{1}{8}\right)$. Jeśli $f\in L(X;Y)$ ε-prawie zachowuje B-ortogonalność, to*

$$\forall_{x\in X}:\ (1-8\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|.$$

Jeśli przestrzenie X, Y są zespolone, to w powyższej nierówności musi być 16ε zamiast 8ε oraz w założeniach $\varepsilon\in\left[0,\frac{1}{16}\right)$ (por. [38, Remark 3.1]*).*

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu nie zakładano ciągłości f. Dla relacji ρ_+, ρ_-, ρ-ortogonalności uzyskamy podobny wynik, również nie zakładając ciągłości. Uogólnimy w ten sposób twierdzenie 4.2. Załóżmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.

Definicja 4.8 Dla ustalonego, niezerowego funkcjonału $x^*\in X^*$ oraz liczby $a\in\mathbb{R}$, zbiór $M := \{x\in X : x^*(x)=a\}$ będziemy nazywali *hiperpłaszczyzną*.

Lemat 4.9 *Niech $D\subset X$ będzie gęstym, gwiaździstym podzbiorem przestrzeni unormowanej X i niech M będzie hiperpłaszczyzną taką, że $0\notin M$. Wówczas $M=\overline{M\cap D}$.*

Dowód: Skoro $0\notin M$, to $M=\{x\in X : x^*(x)=a\}$ dla pewnych $x^*\in X^*\setminus\{0\}$ oraz $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a>0$. Zbiór M jest domknięty, więc $M\supset\overline{M\cap D}$. Pozostaje do udowodnienia $M\subset\overline{M\cap D}$.

Ustalmy $x_o\in M$ i zdefiniujmy zbiór $M_1 := \{x\in X\ :\ x^*(x)>a\}$. Rozważmy dowolny malejący ciąg liczb dodatnich $(\alpha_n)_{n=1,2,\ldots}$ taki, aby $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$ (tzn.: $\alpha_n\searrow 0$).

Następnie ustalmy $n\in\mathbb{N}$. Skoro $x^*\left((1+\alpha_n)x_o\right)=(1+\alpha_n)x^*\left(x_o\right)=(1+\alpha_n)a>a$, to $(1+\alpha_n)x_o\in M_1$. Zbiór M_1 jest otwarty, zatem istnieje liczba ε_n taka, że $0<\varepsilon_n<\alpha_n$ i $K\left((1+\alpha_n)x_o\,;\,\varepsilon_n\right)\subset M_1$. Ponieważ zbiór D jest gęsty, więc istnieje pewien element $d_n\in K\left((1+\alpha_n)x_o\,;\,\varepsilon_n\right)\cap D$. Stąd

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x_o-d_n\| &\leqslant \|x_o-(1+\alpha_n)x_o\|+\|(1+\alpha_n)x_o-d_n\|<\\ &<\alpha_n\|x_o\|+\varepsilon_n<\alpha_n\|x_o\|+\alpha_n.\end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy ciąg $(d_n)_{n=1,2,\dots}$ spełniający $\lim_{n\to+\infty} d_n = x_o$ oraz $d_n \in M_1 \cap D$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Następnie ustalmy $m \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy funkcję $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) := x^*(td_m)$. Zauważmy, że $h(0) = 0$ oraz $h(1) = x^*(d_m) > a$. Oczywiście h jest ciągła, więc z własności Darboux dostajemy równość $h(t_m) = a$ dla pewnego $t_m \in (0,1)$. Stąd $x^*(t_m d_m) = a$, więc $t_m d_m \in M$. Skoro D jest gwiaździsty, to $t_m d_m \in D$, a zatem także $t_m d_m \in M \cap D$ dla $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ $t_m \in [0,1]$ i zbiór $[0,1]$ jest zwarty, to dla pewnej liczby $c \in [0,1]$ i pewnego podciągu $(t_{m_k})_{k=1,2,\dots}$ ciągu $(t_m)_{m=1,2,\dots}$ zachodzi $\lim_{k\to+\infty} t_{m_k} = c$, a stąd $\lim_{k\to+\infty} t_{m_k} d_{m_k} = cx_o$. Z domkniętości zbioru M otrzymujemy $cx_o \in M$. Stąd $x^*(cx_o) = a$, $cx^*(x_o) = a$, $ca = a$, więc $c = 1$. Zatem $\lim_{k\to\infty} t_{m_k} d_{m_k} = x_o$, co oznacza $x_o \in \overline{M \cap D}$. ■

Lemat 4.10 *Załóżmy, że $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniową bijekcją. Niech μ będzie miarą Lebesgue'a określoną w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym takim, że $\mu(A) < +\infty$ oraz $\mu(T(A)) < +\infty$. Wówczas $\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(T(A)) = 0$.*

Dowód: Rozważmy w $\mathbb{R}^n$ normę wprowadzoną przez standardowy iloczyn skalarny. Dla dowolnej funkcji całkowalnej $f\colon B \to \mathbb{R}$ określonej na mierzalnym zbiorze $B \subset \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego dyfeomorfizmu $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 zachodzi znany wzór[1]

$$\int_B f\,d\mu = \int_{\varphi^{-1}(B)} (f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|\,d\mu, \tag{4.1}$$

w którym φ' oznacza jakobian dyfeomorfizmu φ; a więc $|\det\varphi'|$ będzie oznaczać moduł wyznacznika tego jakobianu. Oczywiście T jest dyfeomorfizmem, a ponadto $T'(x) = T$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Stąd $|\det T'(\cdot)| = |\det T| > 0$. Jeśli teraz podstawimy do wzoru (4.1) T w miejsce φ, zbiór A zamiast $\varphi^{-1}(B)$, zbiór $T(A)$ w miejsce B oraz stałą funkcję $f := 1$, to wtedy otrzymamy

$$\mu(T(A)) = \int_{T(A)} 1\,d\mu = \int_A 1\cdot|\det T'|\,d\mu = |\det T'|\cdot\int_A 1\,d\mu = |\det T'|\cdot\mu(A).$$

Z ostatnich równości wynika, że $\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(T(A)) = 0$. ■

W wypowiedzi lematu 4.10 nie zakładamy, że w $\mathbb{R}^n$ jest zdefiniowana norma (norma „pojawia się" dopiero w dowodzie). Dowolna, n-wymiarową przestrzeń unormowaną X jest izometrycznie izomorficzna z $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_c)$, gdzie norma $\|\cdot\|_c\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ jest stosownie dobrana. Ponadto, w przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne. Oznacza to, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem (przy normie euklidesowej), to φ będzie także dyfeomorfizmem przy każdych innych normach (nawet jeśli w dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania φ będą różne normy). Miara Lebesgue'a „nie zależy od normy", tzn.: definiując tą miarę nie używamy pojęcia normy. Zatem po tych niezbędnych komentarzach, możemy wreszcie lemat 4.10 wypowiedzieć w następującej formie.

Lemat 4.11 *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unormowanymi i $\dim X = \dim Y = n$ oraz $T\colon X \to Y$ jest liniową bijekcją. Niech μ, ν oznaczają miarę Lebesgue'a odpowiednio w X oraz Y. Załóżmy, że $A \subset X$ jest zbiorem mierzalnym takim, że $\mu(A) < +\infty$ oraz $\nu(T(A)) < +\infty$. Wówczas $\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu(T(A)) = 0$.*

[1] zob. [29, str.349,350].

Twierdzenie 4.12 *Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi i niech $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{8}\right)$. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest niezerowym odwzorowaniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) *operator f ε-prawie zachowuje ρ_+-ortogonalność;*

(b) *operator f ε-prawie zachowuje ρ_--ortogonalność;*

(c) *operator f ε-prawie zachowuje ρ-ortogonalność;*

(d) *operator f ε-prawie zachowuje B-ortogonalność.*

Ponadto, każdy z powyższy warunków implikuje warunek

(e) *operator f spełnia $\forall_{x\in X}$: $(1-8\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|$.*

Dowód: (d)$\Rightarrow$(e). (zob. twierdzenie 4.7).

(a)$\Rightarrow$(b). Załóżmy, że $x\perp_{\rho_-}y$. Wtedy $\rho'_+(x,-y) \overset{(\rho'_\pm 3)}{=} -\rho'_-(x,y) = 0$, zatem $x\perp_{\rho_+}(-y)$. Skoro zakładamy (a), to $|\rho'_+(fx, f(-y))| \leqslant \varepsilon\|fx\|\cdot\|f(-y)\|$. Z własności $(\rho'_\pm 3)$ oraz z liniowości f otrzymujemy

$$|\rho'_-(fx,fy)| = |-\rho'_-(fx,fy)| = |\rho'_+(fx,f(-y))| \leqslant \varepsilon\|fx\|\cdot\|f(-y)\| = \varepsilon\|fx\|\cdot\|fy\|,$$

czyli $fx\perp^\varepsilon_{\rho_-}fy$. Podobnie dowodzi się (b)$\Rightarrow$(a), więc wykazaliśmy równoważność (a)$\Leftrightarrow$(b).

(a)$\Rightarrow$(d). Aby skrócić redagowanie dowodu tej implikacji, będziemy od tego momentu, aż do nierówności (4.2), stosować oznaczenia $\rho'_\pm$, $\perp_{\rho_\pm}$, $\perp^\varepsilon_{\rho_\pm}$. W tym etapie dowodu należy to rozumieć, jako przeprowadzenie rozumowania najpierw w przypadku ρ'_+, $\perp_{\rho_+}$, $\perp^\varepsilon_{\rho_+}$, a następnie podobnego rozumowania dla przypadku ρ'_-, $\perp_{\rho_-}$, $\perp^\varepsilon_{\rho_-}$. Zatem w (4.2) znajdziemy dwie nierówności: jedną dotyczącą funkcjonału ρ'_+ oraz drugą dotyczącą funkcjonału ρ'_-.

Ustalmy $x, y \in X\setminus\{0\}$ i zauważmy, że $x\perp_{\rho_\pm}\left(-\frac{\rho'_\pm(x,y)}{\|x\|^2}x + y\right)$. Istotnie, powyższa prostopadłość wektorów wynika natychmiast z własności $(\rho'_\pm 1)$. Skoro założyliśmy warunek (a), to jednocześnie zachodzi też (b), a zatem $fx\perp^\varepsilon_{\rho_\pm}\left(-\frac{\rho'_\pm(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)$, więc

$$\begin{aligned}\left|\rho'_\pm\left(fx, -\frac{\rho'_\pm(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)\right| &\leqslant \varepsilon\,\|fx\|\cdot\left\|-\frac{\rho'_\pm(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,\|fx\|\cdot\left(\frac{|\rho'_\pm(x,y)|}{\|x\|^2}\|fx\| + \|fy\|\right) = \\ &= \varepsilon\,\|fx\|\cdot\|fy\| + \varepsilon\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}|\rho'_\pm(x,y)|.\end{aligned}$$

Przekształcając lewą stronę powyższej nierówności przy użyciu $(\rho'_\pm 1)$, otrzymujemy

$$\left|\rho'_\pm(fx,fy) - \frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'_\pm(x,y)\right| \leqslant \varepsilon\,\|fx\|\cdot\|fy\| + \varepsilon\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}|\rho'_\pm(x,y)|. \tag{4.2}$$

Stąd dostajemy dalej

$$\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'_+(x,y) - \varepsilon\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}|\rho'_+(x,y)| - \varepsilon\,\|fx\|\cdot\|fy\| \leqslant \rho'_+(fx,fy) \tag{4.3}$$

jak również

$$\rho'_-(fx,fy) \leqslant \varepsilon\,\|fx\|\cdot\|fy\| + \varepsilon\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}|\rho'_-(x,y)| + \frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'_-(x,y), \tag{4.4}$$

dla wszystkich wektorów $x, y \in X \setminus \{0\}$.

Ustalmy teraz wektory $u, w \in X \setminus \{0\}$ takie, aby $u \perp_B w$. Z twierdzenia 3.1 otrzymujemy $\rho'_-(u,w) \leqslant 0 \leqslant \rho'_+(u,w)$ zatem

$$|\rho'_-(u,w)| = -\rho'_-(u,w) \text{ oraz } |\rho'_+(u,w)| = \rho'_+(u,w).$$

Stąd i z nierówności (4.3) mamy

$$-\varepsilon\|fu\|\cdot\|fw\| \leqslant (1-\varepsilon)\tfrac{\|fu\|^2}{\|u\|^2}\rho'_+(u,w) - \varepsilon\|fu\|\cdot\|fw\| \leqslant \rho'_+(fu,fw),$$

a z nierówności (4.4) dostajemy

$$\rho'_-(fu,fw) \leqslant \varepsilon\|fu\|\cdot\|fw\| + (1-\varepsilon)\tfrac{\|fu\|^2}{\|u\|^2}\rho'_-(u,w) \leqslant \varepsilon\|fu\|\cdot\|fw\|.$$

Wreszcie, otrzymujemy nierówności

$$\rho'_-(fu,fw) - \varepsilon\|fu\|\cdot\|fw\| \leqslant 0 \leqslant \rho'_+(fu,fw) + \varepsilon\|fu\|\cdot\|fy\|.$$

Stosując teraz twierdzenie 3.3, dostajemy $fu \perp^\varepsilon_B fw$. W ten sposób wykazaliśmy, że operator f ε-prawie zachowuje B-ortogonalność.

(c)$\Rightarrow$(a). Załóżmy najpierw, że $\dim X = 1$, i ustalmy $x_o \in X \setminus \{0\}$. Wówczas dla każdego niezerowego odwzorowania liniowego $g\colon X \to Y$ istnieje $w \in Y \setminus \{0\}$ takie, że odwzorowanie g jest postaci $g(tx_o) = tw$, dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Stąd każde niezerowe, liniowe odwzorowanie jest podobieństwem, więc w szczególności spełnia (a), (b), (c), (d).

Rozważmy przypadek, gdy $\dim X = 2$. Niech $x, y \in X$, $x \neq 0$. Stosując (ρ' 1) dostaniemy $x \perp_\rho \left(-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}x + y\right)$. Skoro zakładamy (c), to $fx \perp^\varepsilon_\rho \left(-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)$, a stąd

$$\left|\rho'\left(fx, -\tfrac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)\right| \leqslant \varepsilon \left\|-\tfrac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\|\cdot\|fx\|.$$

Stosując ponownie (ρ' 1) otrzymujemy warunek

$$\forall_{x\in X\setminus\{0\}}\forall_{y\in X} \quad \left|\rho'(fx,fy) - \frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'(x,y)\right| \leqslant \varepsilon \left\|-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\|\cdot\|fx\|. \tag{4.5}$$

Pokażemy teraz, że f jest injekcją. Ustalmy $k \in \ker f$ oraz $x \in X \setminus \ker f$. Podstawiając te wektory do (4.5) dostajemy

$$\left|\rho'(fx,fk) - \tfrac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'(x,k)\right| \leqslant \varepsilon \left\|-\tfrac{\rho'(x,k)}{\|x\|^2}fx + fk\right\|\cdot\|fx\|,$$

a więc $\left|\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'(x,k)\right| \leqslant \varepsilon \left|\frac{\|fx\|^2}{\|x\|^2}\rho'(x,k)\right|$, zatem $\rho'(x,k) = 0$. Pokazaliśmy w ten sposób, że

$$\forall_{x\notin\ker f} \quad x \perp_\rho k.$$

Skoro $\perp_\rho \subset \perp_B$ (por. twierdzenie 3.10), to wówczas otrzymujemy następujący warunek

$$\forall_{x\notin\ker f} \quad x \perp_B k. \tag{4.6}$$

Ponieważ $\dim X = 2$ oraz $\dim\ker f \leqslant 1$, to zbiór $X \setminus \ker f$ musi być gęsty. W ten sposób możemy znaleźć ciąg $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ taki, że $x_n \notin \ker f$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$. Z własności (4.6) dostajemy wtedy $x_n \perp_B k$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągłość normy zapewnia $k \perp_B k$, a zatem $k = 0$. Wykazaliśmy, że f jest injekcją. Stąd $\dim X \leqslant \dim Y$.

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy $\dim X = \dim Y = 2$. Stąd i z injektywności f wnosimy, że f musi być także surjekcją. Zdefiniujmy zbiór $S := D_{sm}(X) \cap f^{-1}(D_{sm}(Y))$. Z liniowości i bijektywności odwzorowania f łatwo wynika, że zbiór S jest gwiaździsty, ponieważ $D_{sm}(X)$, $D_{sm}(Y)$ są gwiaździste (twierdzenie 3.9). Niech μ, ν oznaczają dwuwymiarową miarę Lebesgue'a odpowiednio w X i Y. Twierdzenie 3.9 orzeka, że $\mu(X \setminus D_{sm}(X)) = 0$ oraz $\nu(Y \setminus D_{sm}(Y)) = 0$. Liniowa bijekcja odwzorowuje zbiory miary zero na zbiory miary zero (por. lematy 4.10, 4.11). Skoro f^{-1} jest liniową bijekcją, to na mocy wspomnianych lematów dostajemy równości

$$\mu\left(X \setminus f^{-1}(D_{sm}(Y))\right) = \mu\left(f^{-1}(Y \setminus D_{sm}(Y))\right) = 0. \tag{4.7}$$

Okazuje się, że $\mu(X \setminus S) = 0$. Istotnie,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mu(X \setminus S) &= \mu\left(X \setminus \left(D_{sm}(X) \cap f^{-1}(D_{sm}(Y))\right)\right) = \\ &= \mu\left((X \setminus D_{sm}(X)) \cup \left(X \setminus f^{-1}(D_{sm}(Y))\right)\right) \leqslant \\ &\leqslant \mu(X \setminus D_{sm}(X)) + \mu\left(X \setminus f^{-1}(D_{sm}(Y))\right) \overset{(4.7)}{=} 0 + 0. \end{aligned}$$

Zatem S musi być gęsty (bo jego dopełnienie ma miarę zero). Ostatecznie stwierdzamy, że zbiór S jest gęsty i gwiaździsty.

Niech $a, b \in X$ będą liniowo niezależnymi wektorami. Zdefiniujmy teraz $x^* \in X^*$ przez $x^*(\alpha a + \beta b) := \alpha$. Wówczas $M := \{z \in X : x^*(z) = 1\} = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}$ jest hiperpłaszczyzną oraz $0 \notin M$. Stosując lemat 4.9 dostajemy

$$\overline{M \cap S} = M. \tag{4.8}$$

Zauważmy, że $a \in M$. Korzystając z równości (4.8) otrzymujemy ciąg elementów $a + t_n b \in S$, dla których zachodzi $\lim\limits_{n\to+\infty}(a + t_n b) = a$ (stąd $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$). Powołując się teraz na warunek (4.5) stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} &\left|\rho'(f(a+t_nb), fb) - \tfrac{\|f(a+t_nb)\|^2}{\|a+t_nb\|^2}\rho'(a+t_nb, b)\right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \left\|-\tfrac{\rho'(a+t_nb,b)}{\|a+t_nb\|^2} f(a+t_nb) + fb\right\| \cdot \|f(a+t_nb)\|. \end{aligned}$$

Skoro $a + t_n b \in S = D_{sm}(X) \cap f^{-1}(D_{sm}(Y))$, to $a + t_n b \in D_{sm}(X)$ oraz $f(a + t_n b) \in D_{sm}(Y)$. Stąd $\rho'(a + t_n b, \cdot) = \rho'_+(a + t_n b, \cdot)$ oraz $\rho'(f(a + t_n b), \cdot) = \rho'_+(f(a + t_n b), \cdot)$, więc z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left|\rho'_+(f(a+t_nb), fb) - \tfrac{\|f(a+t_nb)\|^2}{\|a+t_nb\|^2}\rho'_+(a+t_nb, b)\right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \left\|-\tfrac{\rho'_+(a+t_nb,b)}{\|a+t_nb\|^2} f(a+t_nb) + fb\right\| \cdot \|f(a+t_nb)\|. \end{aligned}$$

Funkcja $\rho'_+(\cdot, \cdot)$ nie jest ciągła ze względu na pierwszą zmienną, natomiast możemy zastosować (3.2). Korzystając z tej własności otrzymujemy następującą nierówność

$$\left|\rho'_+(fa, fb) - \frac{\|fa\|^2}{\|a\|^2}\rho'_+(a, b)\right| \leqslant \varepsilon \left\|-\frac{\rho'_+(a,b)}{\|a\|^2} fa + fb\right\| \cdot \|fa\|. \tag{4.9}$$

Wektory a, b były liniowo niezależne. Zauważmy, że ostatnia nierówność jest prawdziwa również dla wektorów liniowo zależnych (aby to sprawdzić wystarczy podstawić np. za wektor b wektor $b = \lambda a$). Zatem wykazaliśmy, że f spełnia (4.9) dla dowolnych wektorów, a to jak łatwo można zauważyć, implikuje warunek (a).

Należy jeszcze udowodnić implikację w pozostałym przypadku. Załóżmy teraz, że $\dim X \geqslant 2$, $\dim Y \geqslant 2$. Ustalmy dowolne dwa wektory $x, y \in X \setminus \{0\}$ takie, że $x \perp_{\rho_+} y$. Oczywiście x, y są liniowo niezależne. Zdefiniujmy odwzorowanie $\widetilde{f}\colon \mathrm{Lin}\{x,y\} \to W$ wzorem $\widetilde{f} := f|_{\mathrm{Lin}\{x,y\}}$, gdzie $W \subset Y$ jest dowolnie ustaloną dwuwymiarową podprzestrzenią taką, że $\widetilde{f}(\mathrm{Lin}\{x,y\}) \subset W$. Z pierwszej części dowodu tej implikacji wynika, że $\widetilde{f}$ ε-prawie zachowuje ρ_+-ortogonalność. Stąd $\widetilde{f}x \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} \widetilde{f}y$ i ostatecznie $fx \perp^{\varepsilon}_{\rho_+} fy$.

(d)$\Rightarrow$(c). Skoro zakładamy warunek (d), to dostajemy warunek (e) (ponieważ implikacja (d)$\Rightarrow$(e) była już uzasadniona). Stąd wiemy już, że f musi być injekcją, więc $\dim X \leqslant \dim Y$. Rozważmy najpierw $\dim X = \dim Y = 2$ (przypadek $\dim X = 1$ uzasadniamy tak samo jak na początku dowodu implikacji (c)$\Rightarrow$(a)).

Zdefiniujmy zbiór $S := D_{sm}(X) \cap f^{-1}(D_{sm}(Y))$. Podobnie jak w dowodzie wcześniejszej implikacji uzasadniamy, że S jest gęstym i gwiaździstym zbiorem. Ustalmy dowolnie $x \in S$, $y \in X$, $x \neq 0$. Stosując (ρ'1) mamy $x \perp_\rho \left(-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}x + y\right)$, a stąd także $x \perp_{\mathrm{B}} \left(-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}x + y\right)$, bo $\perp_\rho \subset \perp_{\mathrm{B}}$. Ponieważ zakładamy warunek (d), to wówczas $fx \perp^{\varepsilon}_{\mathrm{B}} \left(-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)$. Twierdzenie 3.3 dostarcza nierówności

$$\begin{aligned}
&\rho'_-\left(fx, -\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right) - \varepsilon\|fx\|\cdot\left\|-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\| \leqslant 0 \leqslant \\
\leqslant &\rho'_+\left(fx, -\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right) + \varepsilon\|fx\|\cdot\left\|-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\|.
\end{aligned}$$

Skoro $x \in S$, to $fx \in D_{sm}(Y)$, a wtedy $\rho'_-(fx,\cdot) = \rho'(fx,\cdot) = \rho'_+(fx,\cdot)$. Możemy teraz w ostatnich nierównościach wstawić ρ' w miejsce ρ'_- oraz ρ'_+. Pokazaliśmy w ten sposób, że f spełnia następujący warunek:

$$\forall_{x\in S\setminus\{0\}}\forall_{y\in X} \quad \left|\rho'\left(fx, -\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right)\right| \leqslant \varepsilon\left\|-\frac{\rho'(x,y)}{\|x\|^2}fx + fy\right\|\cdot\|fx\|. \tag{4.10}$$

Ustalmy dowolnie dwa liniowo niezależne wektor $a, b \in X$ i zdefiniujmy funkcjonał x^* oraz hiperpłaszczyznę M tak samo jak w trakcie dowodu (c)$\Rightarrow$(a). Z lematu 4.9 otrzymujemy podobnie równość $\overline{M \cap S} = M$, dzięki której dostajemy ciąg elementów $a + t_n b \in S$ takich, że $\lim\limits_{n\to+\infty}(a + t_n b) = a$ (więc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$). Jeśli podstawimy do warunku (4.10) wektor $a + t_n b$ w miejsce x, b w miejsce y, a następnie zastosujemy (3.4), to okaże się, że nierówność z (4.10) zachodzi dla dowolnych wektorów liniowo niezależnych. Łatwo widać, że dla liniowo zależnych także. Ostatecznie $\left|\rho'\left(fa, -\frac{\rho'(a,b)}{\|a\|^2}fa + fb\right)\right| \leqslant \varepsilon\left\|-\frac{\rho'(a,b)}{\|a\|^2}fa + fb\right\|\cdot\|fa\|$ dla wszystkich $a, b \in X$, co implikuje (c). Przypadek dla wyższych wymiarów uzasadniamy podobnie jak wcześniej. ■

Warunek (e) w twierdzeniu 4.12 nie musi być jednak równoważny pozostałym. Uzasadnimy to przykładem 4.15 z podrozdziału 4.4.

4.3 Stabilność liniowych izometrii

Rozwój teorii stabilności liniowych izometrii trwa od lat 60-tych XX wieku. Zagadnieniem, czy każdą liniową prawie izometrię można aproksymować liniową izometrią, zajmowano się na przykład w pracy [35]. Warto też wspomnieć o pracach z lat 80-tych [5], [6], [7], [20], [27], w których kontynuowano badania w tej tematyce. Niedawno ukazała się również praca [42]. W dalszej części rozprawy chodzi między innymi o spostrzeżenie, że stabilność liniowych izometrii jest zagadnieniem bardzo bliskim (a w wielu przypadkach równoważnym) stabilności własności zachowywania ortogonalności przez operatory.

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi.

Definicja 4.13 Operator liniowy nazywamy *liniową ε-izometrią*[2], gdy spełnia warunek

$$\forall_{x\in X}: \ (1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|. \tag{4.11}$$

Zauważmy, że jeśli operator $h\colon X \to Y$ jest η-prawie podobieństwem[3], to $\frac{h}{\|h\|}$ jest liniową η-izometrią. Odwrotnie, jeśli $g\colon X \to Y$ jest liniową ε-izometrią oraz $\|g\| = 1$, to g jest także ε-prawie podobieństwem. Pokazaliśmy właśnie, że istnieje związek między liniowymi prawie podobieństwami, a liniowymi ε-izometriami. Z drugiej strony operatory prawie zachowujące jakąś ortogonalość są liniowymi prawie podobieństwami. Rozważania te sugerują zatem istnienie pewnej zależności między liniowymi ε-izometriami, a operatorami prawie zachowującymi różne relacje ortogonalności.

Definicja 4.14 Powiemy, że *zachodzi (jest) stabilność liniowych izometrii*[4], jeżeli istnieje funkcja $\delta\colon [0,\varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ (uniwersalna dla danej pary przestrzeni X, Y) taka, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\delta(\varepsilon) = 0$, oraz mająca następującą własność: dla każdej liniowej ε-izometrii $f\colon X \to Y$ istnieje izometria liniowa $h\colon X \to Y$ taka, że

$$\|f-h\| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Przez $(X,Y)\in(SLI)$ oznaczamy, że zachodzi (jest) stabilność liniowych izometrii dla pary przestrzeni (X, Y). Symbol $(X,Y)\notin(SLI)$ oznacza, że nie zachodzi (nie ma) stabilność.

Rozsądne jest rozważanie zagadnienia stabilności izometrii liniowych tylko gdy istnieje przynajmniej jedna liniowa izometria między przestrzeniami X, Y, więc tylko takie przypadki będziemy rozpatrywać.

W pracach [20] oraz [42] można znaleźć niektóre wyniki dotyczące zagadnienia omawianego w tym podrozdziale. Praca [20] zawiera następujące rezultaty. Jeśli H oznacza przestrzeń Hilberta, to $(H,H)\in(SLI)$. Jeśli X, Y są skończenie wymiarowymi przestrzeniami unormowanymi, to wówczas $(X,Y)\in(SLI)$. W pracy [20] wykazano również, że

$$(c,c), (c_o,c_o), (l^\infty, l^\infty) \in (SLI). \tag{4.12}$$

Natomiast praca [42] zawiera przykład nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej (oznaczanej tam symbolem H_α), dla której mamy $(H_\alpha, H_\alpha) \notin (SLI)$.

[2] W zagadnieniach dotyczących stabilności izometrii w sensie Hyersa-Ulama rozważało się odwzorowania spełniające $|\,\|f(x)-f(y)\|-\|x-y\|\,|\leqslant\varepsilon$ dla wszystkich $x, y\in X$ - bez zakładania liniowości f.

[3] zob. definicję 4.5.

[4] Zwróćmy uwagę, że zagadnienie, o którym mówimy, różni się od podobnego zagadnienia stabilności izometrii w sensie Hyersa-Ulama - rozpatrywanego na przykład w pracach [24], [39].

W dalszej części pracy pokażemy, że stabilność liniowych izometrii jest związana ze stabilnością własności zachowywania różnych relacji ortogonalności, a w przypadku niektórych klas przestrzeni, zagadnienia te są równoważne.

4.4 Stabilność własności zachowywania ortogonalności

Wykazaliśmy wcześniej (zob. twierdzenia 2.16, 2.18), że ciągłe operatory $f\colon X \to Y$ (gdzie X, Y są przestrzeniami unitarnymi) znajdujące się w małej odległości od podobieństw (lub izometrii) liniowych $h\colon X \to Y$, a więc operatorów zachowujących ortogonalność, muszą ε-prawie zachowywać ortogonalność. Oczywiście ε zależy od tej odległości: im mniejsza jest odległość $\|f-h\|$, tym mniejsza jest liczba ε, więc operator f dokładniej zachowuje ortogonalność.

Poniższy przykład ukazuje, że takiego efektu nie ma w ogólniejszym przypadku, gdy iloczyn skalarny zastąpimy funkcjonałem ρ'_-.

Przykład 4.15 Ustalmy dowolnie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{7}\right]$ i zdefiniujmy operator $f_\alpha\colon l_2^\infty \to l_2^\infty$ wzorem $f_\alpha(x_1, x_2) := (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$. Łatwo widać, że f_α jest liniowe.

Zgodnie z [3, str.18], dla dowolnych $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in l_2^\infty$ mamy

$$\rho'_-(\,(x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\,) = \begin{cases} x_1 y_1, & \text{gdy } |x_1| > |x_2|, \\ x_2 y_2, & \text{gdy } |x_1| < |x_2|, \\ x_1 \min\{y_1, y_2\}, & \text{gdy } x_1 = x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \max\{y_1, y_2\}, & \text{gdy } x_1 = x_2 < 0, \\ x_1 \min\{y_1, -y_2\}, & \text{gdy } x_1 = -x_2 > 0, \\ x_1 \max\{y_1, -y_2\}, & \text{gdy } x_1 = -x_2 < 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Teraz pokażemy, że f_α nie spełnia warunku:

$$\forall_{x,y\in X}:\ x \perp_{\rho_-} y \ \Rightarrow\ f_\alpha x \perp^{\varepsilon}_{\rho_-} f_\alpha y$$

z żadnym $\varepsilon \in [0,1)$. Wybierzmy dwa wektory $x = (1,1),\ y = (0,1) \in l_2^\infty$. Ze wzoru (4.13) wynika, że $x \perp_{\rho_-} y$. Obliczamy następnie

$$\begin{aligned} f_\alpha x &= f_\alpha(1,1) = (\cos\alpha - \sin\alpha, \sin\alpha + \cos\alpha), \\ f_\alpha y &= f_\alpha(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha). \end{aligned}$$

Ponownie stosując wzór (4.13) dostajemy

$$\begin{aligned} \rho'_-(f_\alpha x, f_\alpha y) &= \rho'_-\left(\,(\cos\alpha - \sin\alpha, \sin\alpha + \cos\alpha),\ (-\sin\alpha, \cos\alpha)\,\right) = \\ &= (\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Przeprowadzając kolejne rachunki otrzymujemy jeszcze:

$$\begin{aligned} \|f_\alpha x\|_\infty &= \max\{|\cos\alpha - \sin\alpha|, |\sin\alpha + \cos\alpha|\} = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ \|f_\alpha y\|_\infty &= \max\{|-\sin\alpha|, |\cos\alpha|\} = \cos\alpha. \end{aligned}$$

Uwzględniając wszystkie powyższe równości otrzymujemy

$$\frac{|\rho'_-(f_\alpha x, f_\alpha y)|}{\|f_\alpha x\|_\infty \cdot \|f_\alpha y\|_\infty} = 1,$$

co oznacza, że wektory fx, fy nie są ε-ρ'_--ortogonalne dla żadnego $\varepsilon \in [0,1)$.

Pokażemy, że odwzorowania postaci f_α mogą znajdować się dowolnie blisko operatora zachowującego ρ'_--ortogonalność. Niech $h\colon l_2^\infty \to l_2^\infty$ będzie określone wzorem $h(x) := x$ (h jest izometrią, a więc zachowuje ρ_--ortogonalność). Łatwo można sprawdzić, że dla każdej liczby $t \in \left[0, \frac{\pi}{7}\right]$ prawdziwe są nierówności $\sin t \leqslant t$ oraz $1 - \cos t \leqslant t$. Dalej dostajemy

$$\begin{aligned}\|f_\alpha x - hx\|_\infty &= \max\{|x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha - x_1|, |x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha - x_2|\} = \\ &= \max\{|(\cos\alpha - 1)x_1 - x_2\sin\alpha|, |x_1\sin\alpha + (\cos\alpha - 1)x_2|\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{|1-\cos\alpha|\cdot|x_1| + |x_2|\cdot|\sin\alpha|,\ |x_1|\cdot|\sin\alpha| + |1-\cos\alpha|\cdot|x_2|\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{|1-\cos\alpha|\cdot\|x\|_\infty + \|x\|_\infty\cdot|\sin\alpha|,\ \|x\|_\infty\cdot|\sin\alpha| + |1-\cos\alpha|\cdot\|x\|_\infty\} = \\ &= (|1-\cos\alpha| + |\sin\alpha|)\,\|x\|_\infty = ((1-\cos\alpha) + \sin\alpha)\,\|x\|_\infty \leqslant 2\alpha\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

zatem $\|f_\alpha - h\| \leqslant 2\alpha$, a pamiętamy, że liczbę $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{7}\right]$ ustaliliśmy na początku dowolnie.

Tak jak wcześniej zapowiadaliśmy, uzasadnimy teraz, że w twierdzeniu 4.12 implikacje (e)$\Rightarrow$(a), (e)$\Rightarrow$(b), (e)$\Rightarrow$(c) oraz (e)$\Rightarrow$(d) nie są prawdziwe. Wystarczy dowieść, że tylko implikacja (e)$\Rightarrow$(b) nie jest prawdziwa. W prezentowanym przykładzie 4.15 pokazaliśmy, że operator f_α nie spełniał warunku (b) z twierdzenia 4.12 z żadnym $\varepsilon \in [0,1)$. Zdefiniujmy operator $g_\alpha := \frac{1}{1+2\alpha} f_\alpha$. Najpierw chcemy pokazać, że operator g_α jest prawie podobieństwem. Skoro $\|f_\alpha - h\| \leqslant 2\alpha$, to dla $x \in l_2^\infty$ mamy

$$\big|\, \|f_\alpha x\|_\infty - \|x\|_\infty \big| = \big|\, \|f_\alpha x\|_\infty - \|hx\|_\infty \big| \leqslant \|f_\alpha x - hx\|_\infty \leqslant \|f_\alpha - h\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant 2\alpha\cdot\|x\|_\infty.$$

Wtedy $(1-2\alpha)\|x\|_\infty \leqslant \|f_\alpha x\|_\infty \leqslant (1+2\alpha)\|x\|_\infty$, a zatem

$$\tfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\|x\|_\infty \leqslant \|g_\alpha x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty.$$

Stąd $\|g_\alpha\| \leqslant 1$, więc dla każdego $x \in l_2^\infty$ zachodzi

$$\left(1 - \tfrac{4\alpha}{1+2\alpha}\right)\|g_\alpha\|\cdot\|x\|_\infty = \tfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\|g_\alpha\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant \tfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\|x\|_\infty \leqslant \|g_\alpha x\|_\infty \leqslant \|g_\alpha\|\cdot\|x\|_\infty$$

Pokazaliśmy więc, że operator g_α jest η-prawie podobieństwem (z liczbą[5] $\eta := \frac{4\alpha}{1+2\alpha}$). Jednakże, operator g_α nie spełnia warunku (b) z twierdzenia 4.12 z żadnym $\varepsilon \in [0,1)$, gdyż $g_\alpha = \frac{1}{1+2\alpha} f_\alpha$. Zatem implikacja (e)$\Rightarrow$(b) nie jest prawdziwa.

Powróćmy teraz do zagadnienia stabilności. Pokażemy, że w przypadku niektórych par przestrzeni unormowanych jest możliwe, aby operatory prawie zachowujące pewną ortogonalność przybliżać operatorami, które zachowują ją dokładnie.

Twierdzenie 4.16 *Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, dla których zachodzi stabilność liniowych izometrii (tzn. $(X,Y) \in (SLI)$). Niech $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ będzie stosowną funkcją dotyczącą stabilności liniowych izometrii. Wówczas istnieje funkcja $\widehat{\delta}\colon \left[0, \frac{1}{8}\varepsilon_o\right) \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \widehat{\delta}(\varepsilon) = 0$ i taka, że zachodzi następująca własność: dla każdego operatora $f\colon X \to Y$ ε-prawie zachowującego ρ-ortogonalność[6] istnieje operator $h\colon X \to Y$ zachowujący dokładnie ρ-ortogonalność[7] taki, że*

$$\|f - h\| \leqslant \widehat{\delta}(\varepsilon)\|f\|.$$

[5]Można łatwo sprawdzić, że $\eta < 1$, ponieważ $\alpha \leqslant \frac{\pi}{7}$.

[6]ε-prawie zachowującego ρ_+-ortogonalność (lub ρ_--ortogonalność) - zob. twierdzenie 4.12.

[7]dokładnie zachowujący ρ_+-ortogonalność (lub ρ_--ortogonalność) - zob. twierdzenie 4.2.

Dowód: Jeśli $f = 0$, to $h := f$. Załóżmy, że $f \neq 0$. Ustalmy $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{8}\varepsilon_o\right)$. Niech $f\colon X \to Y$ będzie operatorem, który ε-prawie zachowuje ρ-ortogonalność. Z twierdzenia 4.12 dostajemy dla wszystkich $x \in X$ nierówność

$$(1 - 8\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|.$$

Stąd

$$(1 - 8\varepsilon)\|x\| \leqslant \left\|\frac{f}{\|f\|}x\right\| \leqslant \|x\| \leqslant (1 + 8\varepsilon)\|x\|,$$

zatem przekształcenie $\frac{f}{\|f\|}$ jest 8ε-izometrią. Skoro $(X, Y) \in (SLI)$, to istnieje liniowa izometria $g\colon X \to Y$ taka, że

$$\left\|\frac{f}{\|f\|} - g\right\| \leqslant \delta(8\varepsilon).$$

Definiując podobieństwo $h := \|f\|\, g$ oraz funkcję $\widehat{\delta}\colon \left[0, \frac{1}{8}\right) \to \mathbb{R}$, $\widehat{\delta}(\varepsilon) := \delta(8\varepsilon)$ otrzymujemy $\|f - h\| \leqslant \widehat{\delta}(\varepsilon)\|f\|$. ■

W szczególności, powyższy wynik dostarcza pozytywnego rozwiązania zagadnienia stabilności własności zachowywania $\rho, \rho_{\pm}$-ortogonalnośi w znanych przestrzeniach c, c_o, l^∞ oraz dla rzeczywistej przestrzeni Hilberta[8].

[8]Przypadek przestrzeni Hilberta był już osobno rozważany w podrozdziale 2.4, a otrzymana tam funkcja $\delta\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$ wyrażona była wzorem $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)$.

Rozdział 5

Operatory prawie zachowujące B-ortogonalność, J-ortogonalność

Niektóre sposoby definiowania ortogonalności w przestrzeniach unormowanych zostały przedstawione w trzecim rozdziale. Będziemy się teraz zajmować przybliżonym zachowywaniem, przez operatory, relacji ortogonalności wg Birkhoffa oraz wg Jamesa. Rozważymy dwa różne sposoby definiowania przybliżonej B-ortogonalności. W trzecim rozdziale zdefiniowaliśmy B-ortogonalność warunkiem

$$x \perp_{\mathrm{B}} y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} : \ \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|.$$

Dla $\varepsilon \in [0,1)$ zdefiniowaliśmy przybliżoną B-ortogonalność (por. (3.5))

$$x \perp^{\varepsilon}_{\mathrm{B}} y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} : \ \|x\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2 + 2\varepsilon \|x\| \cdot \|\lambda y\|.$$

Relacja ta została zdefiniowana przez J. Chmielińskiego (zob. [10], [14]). Inna definicja została podana przez S. S. Dragomira we wcześniejszej pracy [21]:

$$x\, {}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{B}} y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} : \ (1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|.$$

W dalszym ciągu będziemy rozważać operatory ε-zachowujące B-ortogonalność. Pojawiły się tutaj dwie różne relacje, zatem aby uniknąć nieścisłości, podajemy poniżej definicję. Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi i załóżmy, że $f \colon X \to Y$ jest liniowe. Ponadto ustalmy $\varepsilon \in [0,1)$.

Definicja 5.1 Powiemy, że f, *ε-zachowuje*[1] *B-ortogonalność,* jeśli spełnia

$$\forall_{x,y \in X} : \ x \perp_{\mathrm{B}} y \ \Rightarrow \ fx\, {}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{B}} fy. \tag{5.1}$$

Przypomnijmy, że relację ${}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{J}}$ zdefiniowano w (3.6) wzorem

$$x\, {}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{J}} y \ :\Leftrightarrow \ \big|\, \|x+y\| - \|x-y\| \,\big| \leqslant \varepsilon \left(\|x+y\| + \|x-y\|\right).$$

Definicja 5.2 Powiemy, że f, *ε-zachowuje J-ortogonalność,* jeśli spełnia

$$\forall_{x,y \in X} : \ x \perp_{\mathrm{J}} y \ \Rightarrow \ fx\, {}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{J}} fy. \tag{5.2}$$

[1] Por. definicję 4.4 w kontekście relacji $\perp^{\varepsilon}_{\mathrm{B}}$.

Łatwo widać, że oba warunki (5.1), (5.2) są szczególnymi przypadkami definicji 2.6.

Wyniki dotyczące operatorów spełniających warunek (5.1) są omówione w pracach [14] oraz [38]. W tej ostatniej wykazano, że te operatory muszą być prawie podobieństwami, o ile przeciwdziedzina jest przestrzenią jednostajnie gładką (zob. [38, Proposition 3.10]). W dalszej części rozdziału pokażemy podobny wynik, ale przy innych założeniach i tylko o dziedzinie operatora.

Najpierw będziemy zajmowali się operatorami spełniającymi (5.2). Poniższy rezultat uzyskano w [16, Theorem 3.2, Corollary 3.4].

Twierdzenie 5.3 *Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, $f\colon X \to Y$ będzie operatorem. Wówczas f spełnia (5.2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant [f]$.*

Dowód: Załóżmy najpierw, że f spełnia (5.2) oraz ustalmy wektory $x, y \in X$ takie, że $\|x\| = \|y\|$. Stąd $\frac{x+y}{2} \perp_J \frac{x-y}{2}$, a wtedy z warunku (5.2) i liniowości odwzorowania f mamy $\frac{fx+fy}{2} {}^{\varepsilon}\!\!\perp_J \frac{fx-fy}{2}$, więc $|\,\|fx\| - \|fy\|\,| \leqslant \varepsilon(\|fx\|+\|fy\|)$. Zatem operator f spełnia warunek

$$\forall_{x,y\in X}: \quad \|x\| = \|y\| \Rightarrow |\,\|fx\| - \|fy\|\,| \leqslant \varepsilon(\|fx\| + \|fy\|). \tag{5.3}$$

Ustalmy dowolnie $x, y \in S(X)$. Z warunku (5.3) mamy $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|fx\| \leqslant \|fy\|$. Prawa strona tej nierówności nie zależy do x, lewa nie zależy od y, zatem przechodząc do supremum i infimum po sferze jednostkowej w odpowiedni sposób, dostajemy $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant [f]$.

Załóżmy teraz, że f spełnia $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant [f]$, a następnie ustalmy $u, w \in X$ takie, że $u \perp_J w$, tzn. $\|u+w\| = \|u-w\|$. Bez straty ogólności można założyć $u \neq w$ (w przeciwnym wypadku $u = w = 0$, więc warunek (5.2) zachodzi). Zdefiniujmy

$$\gamma_0 := \left\| f\left(\frac{u-w}{\|u-w\|}\right)\right\| \in [\,[f], \|f\|\,].$$

Zakładana nierówność dostarcza, że dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\gamma_0\|x\| \leqslant \tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\|\cdot\|x\| \leqslant [f]\cdot\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\| \leqslant \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}[f]\cdot\|x\| \leqslant \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\gamma_0\|x\|,$$

a stąd $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\gamma_0\|x\| \leqslant \|fx\| \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\gamma_0\|x\|$ dla $x \in X$, co jest równoważne warunkowi

$$\forall_{x\in X}: \quad |\,\|fx\| - \gamma_0\|x\|\,| \leqslant \varepsilon(\|fx\| + \gamma_0\|x\|).$$

Podstawmy $u + w$ za x w powyższej nierówności. Wówczas

$$|\,\|f(u+w)\| - \gamma_0\|u+w\|\,| \leqslant \varepsilon(\|f(u+w)\| + \gamma_0\|u+w\|). \tag{5.4}$$

Stosując kolejno liniowość operatora f, definicję liczby γ_0, równość $\|u+w\| = \|u-w\|$, nierówność (5.4), oraz znowu definicję liczby γ_0, możemy wykazać, że

$$\begin{aligned}
|\,\|fu+fw\| - \|fu-fw\|\,| &= |\,\|f(u+w)\| - \gamma_0\|u-w\|\,| = \\
&= |\,\|f(u+w)\| - \gamma_0\|u+w\|\,| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon(\|f(u+w)\| + \gamma_0\|u+w\|) = \\
&= \varepsilon(\|f(u+w)\| + \gamma_0\|u-w\|) = \\
&= \varepsilon(\|fu+fw\| + \|fu-fw\|).
\end{aligned}$$

Stąd $fu \,{}^{\varepsilon}\!\!\perp_J fw$, co kończy dowód. ■

Podstawiając w powyższym twierdzeniu $\varepsilon = 0$ otrzymamy następujący

Wniosek 5.4 *Operator $f: X \to Y$ zachowuje J-ortogonalność wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowym podobieństwem.*

Omówimy teraz zagadnienie stabilności, którym się będziemy zajmowali w tym rozdziale w kontekście operatorów ε-zachowujących B-ortogonalność lub J-ortogonalność. Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi.

Definicja 5.5 Mówimy, że dla pary przestrzeni (X, Y) *jest stabilność operatorów zachowujących B-ortogonalność (J-ortogonalność),* jeśli istnieje funkcja $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ taka, że $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta(\varepsilon) = 0$ oraz spełniająca następujący warunek: dla każdego operatora $f: X \to Y$ ε-zachowującego B-ortogonalność (ε-zachowującego J-ortogonalność), istnieje operator $h\colon X \to Y$ zachowujący B-ortogonalność (zachowujący J-ortogonalność), taki że

$$\|f - h\| \leqslant \delta(\varepsilon)\|f\|.$$

Symbol $(X, Y) \in (SOBP)$ będzie oznaczał, że para przestrzeni unormowanych (X, Y) ma stabilność operatorów zachowujących B-ortogonalność; natomiast $(X, Y) \notin (SOBP)$ będzie oznaczać brak tej stabilności. W przypadku J-ortogonalności stosujemy podobnie oznaczenia $(X, Y) \in (SOJP)$, oraz $(X, Y) \notin (SOJP)$.

Twierdzenie 5.6 *Jeżeli $f: X \to Y$ jest ε-izometrią, to f, ε-zachowuje J-ortogonalność.*

Dowód: Niech $f: X \to Y$ będzie ε-izometrią. Wtedy dla $x \in X$ jest $(1 - \varepsilon)\|x\| \leqslant \|fx\|$ oraz $\|fx\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|x\|$, zatem $(1 - \varepsilon) \leqslant [f]$, a także $\|f\| \leqslant (1 + \varepsilon)$. Łącząc te dwie nierówności otrzymujemy $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant [f]$, zatem z twierdzenia 5.3 f spełnia (5.2). ■

Twierdzenie 5.7 $(X, Y) \in (SOJP) \Leftrightarrow (X, Y) \in (SLI)$.

Dowód: "$\Rightarrow$" Załóżmy, że para przestrzeni (X, Y) ma stabilność operatorów zachowujących J-ortogonalność i niech $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ będzie stosowną funkcją związaną z tą stabilnością. Ustalmy teraz dowolną ε-izometrię $f: X \to Y$. Z twierdzenia 5.6 wiemy, że operator f, ε-zachowuje J-ortogonalność. Zatem istnieje operator $h\colon X \to Y$, zachowujący J-ortogonalność, który realizuje nierówność

$$\|f - h\| \leqslant \delta(\varepsilon)\, \|f\|. \tag{5.5}$$

Skoro f jest liniową ε-izometrią, to z nierówności (4.11) otrzymujemy

$$1 - \varepsilon \leqslant \|f\| \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{5.6}$$

Odwzorowanie $g := \frac{h}{\|h\|}$ również zachowuje J-ortogonalność, zatem wobec wniosku 5.4, g musi być także izometrią liniową. A więc teraz do wykazania stabilności liniowych izometrii wystarczy pokazać, że odległość $\|f - g\|$ jest niewielka. Stosując (5.5) oraz (5.6) otrzymujemy oszacowanie $\|h\| \leqslant \delta(\varepsilon)\|f\| + \|f\| \leqslant \delta(\varepsilon)(1 + \varepsilon) + 1 + \varepsilon$, a stąd także $\|h\| - 1 \leqslant \delta(\varepsilon)(1+\varepsilon)+\varepsilon$. Ponownie stosując te same dwa warunki dostajemy oszacowanie $-\|h\| \leqslant \delta(\varepsilon)\|f\| - \|f\| \leqslant \delta(\varepsilon)(1+\varepsilon) - (1-\varepsilon)$, a więc $1 - \|h\| \leqslant \delta(\varepsilon)(1+\varepsilon)+\varepsilon$. Wreszcie uzasadniliśmy nierówność

$$|\,\|h\| - 1\,| \leqslant \delta(\varepsilon)(1 + \varepsilon) + \varepsilon. \tag{5.7}$$

Nierówności (5.5), (5.6) oraz (5.7) dostarczają następujące oszacowanie

$$\|f-g\| = \left\|f - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \|f-h\| + \left\|h - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \delta(\varepsilon)\|f\| + \left\|(\|h\|-1)\frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(\varepsilon)(1+\varepsilon) + |\,\|h\|-1\,| \leqslant \delta(\varepsilon)(1+\varepsilon)+\delta(\varepsilon)(1+\varepsilon)+\varepsilon =: \widehat{\delta}(\varepsilon).$$

Łatwo widać, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\widehat{\delta}(\varepsilon)=0$, zatem $(X,Y)\in(SLI)$.

"$\Leftarrow$" Załóżmy teraz, że zachodzi stabilność liniowych izometrii i niech $\delta\colon [0,\varepsilon_o)\to\mathbb{R}$ będzie odpowiednią funkcją dotyczącą tej stabilności. Zdefiniujmy następnie funkcję $\widetilde{\delta}\colon[0,1)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$\widetilde{\delta}(\varepsilon) := \begin{cases} \min\{\delta(\varepsilon),3\} & \text{gdy } \varepsilon\in[0,\varepsilon_o); \\ 3 & \text{gdy } \varepsilon\in[\varepsilon_o,1). \end{cases}$$

Widać od razu, że $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\widetilde{\delta}(\varepsilon)=0$. Niech $f\colon X\to Y$ będzie operatorem ε-zachowującym J-ortogonalność. Na mocy twierdzenia 5.3 wnosimy, że $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\|\leqslant[f]$. Stąd

$$\left(1-\left(1-\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right)\|x\| = \tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\| \leqslant \tfrac{[f]}{\|f\|}\|x\| \leqslant \left\|\tfrac{f}{\|f\|}x\right\| \leqslant \left\|\tfrac{f}{\|f\|}\right\|\cdot\|x\| \leqslant \left(1+\left(1-\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right)\|x\|,$$

więc operator $\frac{f}{\|f\|}$ jest $\widehat{\varepsilon}$-izometrią dla $\widehat{\varepsilon}:=1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Wówczas istnieje liniowa izometria $h\colon X\to Y$ realizująca nierówność[2] $\left\|\frac{f}{\|f\|}-h\right\|\leqslant\widetilde{\delta}\left(1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)=:\grave{\delta}(\varepsilon)$. Ostatecznie

$$\|\,f-\|f\|h\,\|\leqslant\grave{\delta}(\varepsilon)\|f\|,$$

gdzie $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\grave{\delta}(\varepsilon)=0$. Ponadto $\|f\|h$ jest podobieństwem, więc zachowuje J-ortogonalność (zob. wniosek 5.4), zatem $(X,Y)\in(SOJP)$. ■

Twierdzenie 5.8 *Jeżeli $f\colon X\to Y$ jest ε-izometrią, to f, $\widehat{\varepsilon}$-zachowuje B-ortogonalność, gdzie $\widehat{\varepsilon}=1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.*

Dowód: Ustalmy $x,y\in X$ takie, że $x\perp_B y$ i wybierzmy dowolnie $\lambda\in\mathbb{R}$. Wtedy

$$\|fx\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x+\lambda y\|\leqslant\tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|f(x+\lambda y)\|,$$

a stąd $\left(1-\left(1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right)\|fx\|\leqslant\|fx+\lambda fy\|$, więc $fx\,{}^{\widehat{\varepsilon}}\!\!\perp_B fy$. ■

Twierdzenie 5.9 $(X,Y)\in(SOBP)\Rightarrow(X,Y)\in(SLI)$.

Dowód: Załóżmy, że para przestrzeni (X,Y) ma stabilność w sensie $(X,Y)\in(SOBP)$ z funkcją $\delta\colon[0,\varepsilon_o)\to\mathbb{R}$. Pokażemy, że zachodzi stabilność liniowych izometrii z pewną funkcją $\grave{\delta}\colon[0,\varepsilon_1)\to\mathbb{R}$, gdzie $\varepsilon_1:=\frac{\varepsilon_o}{2-\varepsilon_o}$. Ustalmy teraz dowolną ε-izometrię $f\colon X\to Y$, z $\varepsilon<\varepsilon_1$. Z twierdzenia 5.8 operator f, $\widehat{\varepsilon}$-zachowuje B-ortogonalność, gdzie $\widehat{\varepsilon}=1-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

[2]Teraz będzie widoczne, dlaczego funkcję δ musieliśmy zamienić na $\widetilde{\delta}$. Zauważmy, że dla dowolnej izometrii $g\colon X\to Y$ zachodzi $\left\|\frac{f}{\|f\|}-g\right\|\leqslant\left\|\frac{f}{\|f\|}\right\|+\|g\|\leqslant(1+\widehat{\varepsilon})+1\leqslant 3$. Jeżeli $\widehat{\varepsilon}<\varepsilon_o$, to $\left\|\frac{f}{\|f\|}-g\right\|\leqslant\delta(\widehat{\varepsilon})$, a gdy $\varepsilon_o\leqslant\widehat{\varepsilon}$, to wtedy $\left\|\frac{f}{\|f\|}-g\right\|\leqslant\widetilde{\delta}(\widehat{\varepsilon})$.

Łatwo można sprawdzić, że $\widehat{\varepsilon} < \varepsilon_o$. Dzięki założeniu możemy stwierdzić, że istnieje operator $h\colon X \to Y$, który zachowuje B-ortogonalność oraz

$$\|f - h\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})\,\|f\|. \tag{5.8}$$

Ponieważ f jest liniową ε-izometrią, więc z nierówności (4.11) mamy

$$1 - \varepsilon \leqslant \|f\| \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{5.9}$$

Łatwo widać, że operator $g := \frac{h}{\|h\|}$ także zachowuje B-ortogonalność, więc z twierdznia 4.3 wiemy, że g jest izometrią liniową. Do zakończenia dowodu pozostaje odpowiednio oszacować odległość $\|f - g\|$. Z warunków (5.8) oraz (5.9) mamy $\|h\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})\|f\| + \|f\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + 1 + \varepsilon$, a dalej $\|h\| - 1 \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \varepsilon$. Z tych samych dwóch warunków otrzymujemy $-\|h\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})\|f\| - \|f\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) - (1-\varepsilon)$, a stąd $1 - \|h\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \varepsilon$. W rezultacie

$$\big|\,\|h\| - 1\,\big| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{5.10}$$

Z (5.8), (5.9) oraz (5.10) dostajemy

$$\begin{aligned}\|f - g\| &= \left\|f - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \|f - h\| + \left\|h - \frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})\|f\| + \left\|(\|h\| - 1)\frac{h}{\|h\|}\right\| \leqslant \\ &\leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \big|\,\|h\| - 1\,\big| \leqslant \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \varepsilon = \\ &= 2\delta(\widehat{\varepsilon})(1+\varepsilon) + \varepsilon = 2\delta\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)(1+\varepsilon) + \varepsilon =: \check{\delta}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Łatwo widać, że $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \check{\delta}(\varepsilon) = 0$, zatem $(X, Y) \in (SLI)$. ∎

Pojawia się teraz naturalne pytanie, czy odwrotna implikacja, tzn.:

$$(X, Y) \in (SLI) \Rightarrow (X, Y) \in (SOBP) \tag{5.11}$$

również jest prawdziwa. Odpowiedź jest twierdząca przy założeniu, że przestrzeń Y jest jednostajnie gładka. Dowód tego faktu można znaleźć w [38, Theorem 4.3]. W dalszej części rozdziału uzasadnimy przy innym założeniu, tym razem tylko o przestrzeni X, że implikacja (5.11) jest również prawdziwa.

5.1 Operatory określone na sumie prostej przestrzeni

Pokażemy za chwilę, że każde prawie podobieństwo prawie zachowuje B-ortogonalność w sensie definicji 5.1. Odwrotny rezultat udało się otrzymać niestety tylko dla pewnych klas przestrzeni. Mianowicie, wykażemy, że każdy operator prawie zachowujący B-ortogonalność (nadal w sensie tej samej definicji) musi być prawie podobieństwem o ile dziedzina jest np. sumą prostą przestrzeni unormowanych. W dalszej części podrozdziału zajmiemy się stabilnością operatorów zachowujących B-ortogonalność.

Twierdzenie 5.10 *Niech $f\colon X \to Y$ będzie ε-podobieństwem określonym pomiędzy rzeczywistymi unormowanymi przestrzeniami X, Y. Wówczas f, ε-zachowuje B-ortogonalność.*

Dowód: Ustalmy $x, y \in X$ takie, że $x \perp_B y$. Ustalmy dowolnie $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\| \leqslant \|f\|\cdot\|x+\lambda y\| \leqslant \|f\|\cdot\frac{1}{(1-\varepsilon)\|f\|}\|f(x+\lambda y)\| = \frac{1}{(1-\varepsilon)}\|fx+\lambda fy\|,$$

a to oznacza, że $fx\,{}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{B}} fy$. ■

Lemat 5.11 *Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową i załóżmy, że funkcja $\varphi\colon \mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\to\mathbb{R}$, określona na sympleksie $\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\subset V$, jest wypukła. Wtedy $\max\varphi\left(\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\right)=\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\}$.*

Dowód: Ustalmy dowolnie $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k u_k\in\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}$. Oczywiście $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ oraz $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in[0,1]$. Dalej otrzymujemy

$$\varphi(x)=\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi\left(u_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\}=$$

$$=\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\}.$$

Przechodząc z x do supremum po sympleksie, dostajemy nierówność

$$\sup\varphi\left(\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\right)\leqslant\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\},$$

a stąd także $\max\varphi\left(\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\right)\leqslant\max\left\{\varphi\left(u_1\right),\ldots,\varphi\left(u_n\right)\right\}$. Nierówność w przeciwną stronę jest oczywista, bo $\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}\supset\{u_1,\ldots,u_n\}$ ■

Twierdzenie 5.12 *Niech Y będzie dowolną rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że $\varepsilon\in[0,1)$ oraz $f\colon l_2^\infty\to Y$ jest liniowe i ε-zachowuje B-ortogonalność. Wtedy operator f spełnia każdy z następujących warunków:*

(a) $\forall_{x,y\in S(l_2^\infty)}:\ (1-\varepsilon)\|fx\|\leqslant\|fy\|$,

(b) $(1-\varepsilon)\|f\|\leqslant[f]$,

(c) $\forall_{x\in l_2^\infty}:\ (1-\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\|_\infty\leqslant\|fx\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|_\infty$, *tzn. f jest ε-prawie podobieństwem.*

Dowód: Dane są wektory $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)\in l_2^\infty$. Sfera jednostkowa w tej przestrzeni składa się z czterech odcinków $S_1=[e_1+e_2,-e_1+e_2]$, $S_2=[-e_1+e_2,-e_1-e_2]$, $S_3=[-e_1-e_2,e_1-e_2]$, $S_4=[e_1-e_2,e_1+e_2]$, tzn.: $S(l_2^\infty)=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$.

Ustalmy dowolnie $x,y\in S_1$, tak aby $x\neq e_1+e_2\neq y\neq x$ oraz $x\neq -e_1+e_2\neq y$. Wtedy istnieje liczba $t_o\in(0,1)$ taka, że dla każdego $t\in(-t_o,t_o)$ jest $x+t(y-x)\in S_1$. Stąd $\|x+t(y-x)\|_\infty=1$ oraz $\|x\|_\infty=1$. Funkcja $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$\varphi(t):=\|x+t(y-x)\|_\infty$$

jest wypukła oraz $\varphi(t)=1$ dla $t\in(-t_o,t_o)$, zatem $\varphi(0)=\min\varphi(\mathbb{R})$. Stąd dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy $\|x\|_\infty\leqslant\|x+t(y-x)\|_\infty$, czyli $x\perp_{\mathrm{B}}(y-x)$.

Z założenia, o odwzorowaniu f, dostajemy $fx\,{}^{\varepsilon}\!\perp_{\mathrm{B}}(fy-fx)$, a więc dla każdego $\lambda\in\mathbb{R}$ otrzymujemy $(1-\varepsilon)\|fx\|\leqslant\|fx+\lambda(fy-fx)\|$. W szczególności, dla $\lambda:=1$ mamy nierówność $(1-\varepsilon)\|fx\|\leqslant\|fy\|$. Z ciągłości odwzorowania f i normy wynika, że ta ostatnia nierówność jest także prawdziwa, dla wszystkich x,y z odcinka S_1, a także w przypadku gdy $x=y$. Rozumowanie analogiczne do powyższego, ale dla pozostałych „odcinków” sfery, pozwala uzyskać dla każdego $k=1,2,3,4$ warunek

$$\forall_{x,y\in S_k}\ (1-\varepsilon)\|fx\|\leqslant\|fy\|. \tag{5.12}$$

Funkcja $\psi\colon \overline{K}(l_2^\infty) \to \mathbb{R}$, zadana wzorem $\psi(x) := \|fx\|$, jest wypukła. Skoro $\overline{K}(l_2^\infty)$ jest sympleksem, to z lematu 5.11 wynika, że maksimum tej funkcji realizuje się w pewnym wierzchołku $w \in \{e_1+e_2,\ -e_1+e_2,\ -e_1-e_2,\ e_1-e_2\}$. Zatem $\|f\| = \|fw\| = \|f(-w)\|$.

Ustalmy teraz dowolnie $u \in S(l_2^\infty)$. Wektor u należy do S_k dla pewnego $k \in \{1,2,3,4\}$. Do tego samego odcinka należy również albo w albo $-w$. Bez straty ogólności załóżmy, że $u, w \in S_k$. Stąd i z warunku (5.12) otrzymujemy $(1-\varepsilon)\|fw\| \leqslant \|fu\|$. W konsekwencji

$$\forall_{u\in S(l_2^\infty)}\ (1-\varepsilon)\|f\| \leqslant \|fu\|.$$

Przechodząc z u do infimum po sferze jednostkowej otrzymujemy

$$(1-\varepsilon)\|f\| \leqslant [f]. \tag{5.13}$$

Stąd i z lematu 1.5 dostajemy

$$\forall_{x,y\in S(l_2^\infty)}\ (1-\varepsilon)\|fx\| \leqslant \|fy\|.$$

Z (5.13) mamy też $(1-\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant [f]\cdot\|x\|_\infty \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_\infty$ dla każdego $x\in l_2^\infty$. ■

Twierdzenie 5.13 *Niech Y będzie dowolną rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że $\varepsilon \in [0,1)$ oraz $f\colon l_2^1 \to Y$ jest liniowe i ε-zachowuje B-ortogonalność. Wtedy operator f spełnia każdy z następujących warunków:*

(a) $\forall_{x,y\in S(l_2^1)}$: $(1-\varepsilon)\|fx\| \leqslant \|fy\|$,

(b) $(1-\varepsilon)\|f\| \leqslant [f]$,

(c) $\forall_{x\in l_2^1}$: $(1-\varepsilon)\|f\|\cdot\|x\|_1 \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_1$, *tzn. f jest ε-prawie podobieństwem.*

Dowód: Przestrzenie l_2^∞ oraz l_2^1 są izometrycznie izomorficzne. Niech $g\colon l_2^\infty \to l_2^1$ będzie liniową izometrią. Wówczas $f\circ g\colon l_2^\infty \to Y$ także ε-zachowuje B-ortogonalność, zatem poprzednie twierdzenie orzeka, że $\forall_{x,y\in S(l_2^\infty)}$: $(1-\varepsilon)\|f(gx)\| \leqslant \|f(gy)\|$. Skoro g jest izometrią oraz surjekcją, to $u := gx, w := gy \in S(l_2^1)$ i powyższy warunek zapisujemy w postaci $\forall_{u,w\in S(l_2^1)}$: $(1-\varepsilon)\|f(u)\| \leqslant \|f(w)\|$. Pozostałe warunki (b), (c) wyprowadzamy wprost z lematu 1.5. ■

Niech X_1, X_2 będą dowolnymi przestrzeniami unormowanymi. Przestrzeń produktową $X := X_1 \times X_2$ z normą $\|(x_1,x_2)\|_\infty := \max\{\|x_1\|_X, \|x_2\|_Y\}$, będziemy nazywali *sumą prostą przestrzeni* X_1, X_2 i oznaczali przez $X_1 \oplus_\infty X_2$. Tą samą przestrzeń produktową, wyposażoną w normę $\|(x_1,x_2)\|_1 := \|x_1\|_X + \|x_2\|_Y$ będziemy również nazywali *sumą prostą przestrzeni* X_1, X_2 i zapisywali jako $X_1 \oplus_1 X_2$.

Uwaga 5.14 Można wykazać, że znane przestrzenie $l^\infty, L^1[0,1], c, c_o, l^1$ są sumami prostymi pewnych przestrzeni[3]. Rozważmy najpierw trzy przykładowe odwzorowania:

$f_a\colon c_o \to \mathbb{R}\oplus_\infty c_o,\quad f_a(x_1,x_2,x_3,\dots) := (x_1,\ (x_2,x_3,x_4,\dots))$;

$f_b\colon l^\infty \to l^\infty \oplus_\infty l^\infty,\quad f_b(x_1,x_2,x_3,\dots) := (\,(x_1,x_3,x_5,\dots),\ (x_2,x_4,x_6,\dots)\,)$;

$f_c\colon l^1 \to l_3^1 \oplus_1 l^1,\quad f_b(x_1,x_2,x_3,\dots) := (\,(x_1,x_2,x_3),\ (x_4,x_5,x_6,\dots)\,)$.

Łatwo można zauważyć, że f_a, f_b, f_c są liniowymi, surjektywnymi izometriami. Stąd wnosimy, że $c_o = \mathbb{R}\oplus_\infty c_o$, $l^\infty = l^\infty \oplus_\infty l^\infty$ oraz $l^1 = l_3^1 \oplus_1 l^1$. Wzorując się na tych trzech

[3]tzn. są izometrycznie izomorficzne z sumami prostymi pewnych przestrzeni.

przykładach, łatwo można wskazać właściwe izometrie dla pozostałych przestrzeni. Prezentowane tutaj rozkłady przestrzeni na sumę prostą nie są jednoznaczne. Istotnie, nie trudno można dobrać stosowne izometrie, aby uzasadnić równości $c_o = l_2^\infty \oplus_\infty c_o$ oraz $l^\infty = l_2^\infty \oplus_\infty l^\infty$, a także $l^1 = l_2^1 \oplus_1 l^1$.

Twierdzenie 5.15 *Niech X_1, X_2, Y będą dowolnymi rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi. Załóżmy, że $f\colon X_1 \oplus_\infty X_2 \to Y$ jest liniowe i ε-zachowuje B-ortogonalność. Wtedy operator f spełnia każdy z poniższych warunków:*

(a) $\forall_{x,y\in S(X_1\oplus_\infty X_2)}: \ (1-\eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|$, *gdzie* $\eta(\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon)^3$,

(b) $(1-\eta(\varepsilon))\|f\| \leqslant [f]$,

(c) $\forall_{x\in X_1\oplus_\infty X_2}: \ (1-\eta(\varepsilon))\|f\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_\infty$, *tzn. f jest $\eta(\varepsilon)$-prawie podobieństwem.*

Dowód: Ustalmy dowolnie $x, y \in S(X_1\oplus_\infty X_2)$. Wtedy istnieją wektory $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ takie, że $x = (x_1, x_2)$. Skoro norma tego wektora jest równa jeden, to $\|x_2\|_{X_2} \leqslant \|x_1\|_{X_1} = 1$ lub $\|x_1\|_{X_1} \leqslant \|x_2\|_{X_2} = 1$. Załóżmy, bez straty ogólności, że $\|x_2\|_{X_2} \leqslant \|x_1\|_{X_1} = 1$. Stąd $x = (x_1, \alpha_2 a_2)$ dla pewnych[4] $a_2 \in S(X_2)$ oraz $\alpha_2 \in [0,1]$.

Podobnie istnieją $y_1 \in X_1$, $y_2 \in X_2$, że $\|y_2\|_{X_2} \leqslant \|y_1\|_{X_1} = 1$ lub $\|y_1\|_{X_1} \leqslant \|y_2\|_{X_2} = 1$ gdzie $y = (y_1, y_2)$. Postępując podobnie jak przed chwilą, możemy wektor y zapisać jako $y = (\beta_1 b_1, \beta_2 b_2)$, dla pewnych $b_1 \in S(X_1)$, $b_2 \in S(X_2)$ oraz $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$.

Podprzestrzeń $W_1 := \operatorname{Lin}\{(x_1, 0), (0, a_2)\}$ jest izometrycznie izomorficzna z l_2^∞, a ponadto $(x_1, \alpha_2 a_2), (x_1, 0) \in S(W_1)$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 5.12 do odwzorowania $f|_{W_1}$. Wówczas uzyskujemy

$$(1-\varepsilon)\|f(x_1, \alpha_2 a_2)\| \leqslant \|f(x_1, 0)\|. \tag{5.14}$$

Podobnie podprzestrzeń $W_2 := \operatorname{Lin}\{(x_1, 0), (0, b_2)\}$ możemy utożsamiać z l_2^∞. Ponadto $(x_1, 0), (0, b_2) \in S(W_2)$. Ponownie stosując twierdzenie 5.12 (tym razem do operatora $f|_{W_2}$), otrzymujemy

$$(1-\varepsilon)\|f(x_1, 0)\| \leqslant \|f(0, b_2)\|. \tag{5.15}$$

Wreszcie podprzestrzeń $W_3 := \operatorname{Lin}\{(b_1, 0), (0, b_2)\}$ także jest izometrycznie izomorficzna z l_2^∞ oraz $(0, b_2), (\beta_1 b_1, \beta_2 b_2) \in S(W_3)$. Operator $f|_{W_3}$ spełnia założenia twierdzenia 5.12, stąd otrzymujemy

$$(1-\varepsilon)\|f(0, b_2)\| \leqslant \|f(\beta_1 b_1, \beta_2 b_2)\|. \tag{5.16}$$

Łącząc wszystkie warunki (5.14), (5.15), (5.16) otrzymujemy ostatecznie

$$(1-\varepsilon)^3\|fx\| = (1-\varepsilon)^3\|f(x_1, \alpha_2 a_2)\| \leqslant \|f(\beta_1 b_1, \beta_2 b_2)\| = \|fy\|.$$

Udowodniliśmy warunek (a). Następnie lemat 1.5 dostarcza (b), a stąd dostajemy (c). ■

Twierdzenie 5.16 *Niech X_1, X_2, Y będą dowolnymi rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi. Załóżmy, że $f\colon X_1 \oplus_1 X_2 \to Y$ jest liniowe i ε-zachowuje B-ortogonalność. Wtedy operator f spełnia każdy z poniższych warunków:*

[4] Jeśli $x_2 \neq 0$, to oczywiście $a_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|_{X_2}}$, $\alpha_2 = \|x_2\|_{X_2}$. Natomiast gdy $x_2 = 0$, to wtedy wystarczy dowolnie ustalić $a_2 \in S(X_2)$ i przyjąć $\alpha_2 = 0$.

(a) $\forall_{x,y\in S(X_1\oplus_1 X_2)}: \ (1-\eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|$, *gdzie* $\eta(\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon)^3$,
(b) $(1-\eta(\varepsilon))\|f\| \leqslant [f]$,
(c) $\forall_{x\in X_1\oplus_1 X_2}: \ (1-\eta(\varepsilon))\|f\|\cdot\|x\|_1 \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_1$, *tzn.* f *jest* $\eta(\varepsilon)$*-prawie podobieństwem.*

Dowód: Wybierzmy wektory $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in S(X_1 \oplus_1 X_2)$. Podobnie jak w poprzednim dowodzie, możemy teraz zauważyć, że $x = (\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2)$, $y = (\beta_1 b_1, \beta_1 b_2)$ dla pewnych wektorów $a_k, b_k \in S(X_k)$, gdzie $k = 1, 2$ oraz dla odpowiednich liczb $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ spełniających $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 1 = |\beta_1| + |\beta_2|$.

Podprzestrzeń $W_1 := \mathrm{Lin}\{(a_1, 0), (0, a_2)\}$ utożsamiamy z l_2^1. Możemy zatem użyć twierdzenia 5.13 do operatora $f|_{W_1}$ aby wyprowadzić dla wektorów $(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2), (a_1, 0) \in S(W_1)$ nierówność

$$(1-\varepsilon)\|f(\alpha a_1, \alpha_2 a_2)\| \leqslant \|f(a_1, 0)\|. \tag{5.17}$$

Definiując podprzestrzeń $W_2 := \mathrm{Lin}\{(a_1, 0), (0, b_2)\}$, która także jest izometrycznie izomorficzna z l_2^1, oraz operator $f|_{W_2}$, a następnie stosując ponownie twierdzenie 5.13, dostajemy dla wektorów $(a_1, 0), (0, b_2) \in S(W_2)$ następną nierówność

$$(1-\varepsilon)\|f(a_1, 0)\| \leqslant \|f(0, b_2)\|. \tag{5.18}$$

Zdefiniujmy ostatnią już podprzestrzeń w tym dowodzie, $W_3 := \mathrm{Lin}\{(b_1, 0), (0, b_2)\}$ i rozważmy operator $f|_{W_3}$. Wzorując się na wcześniejszych rozumowaniach, otrzymujemy dla $(0, b_2), (\beta_1 b_1, \beta_1 b_2) \in S(W_3)$ warunek

$$(1-\varepsilon)\|f(0, b_2)\| \leqslant \|f(\beta_1 b_1, \beta_1 b_2)\|. \tag{5.19}$$

Z nierówności (5.17), (5.18), (5.19) otrzymujemy w końcu

$$(1-\varepsilon)^3\|fx\| = (1-\varepsilon)^3\|f(\alpha a_1, \alpha_2 a_2)\| \leqslant \|f(\beta_1 b_1, \beta_2 b_2)\| = \|fy\|.$$

Warunek (a) został więc wykazany. Z lematu 1.5 dostajemy (b) oraz (c). ■

Wykażemy teraz twierdzenia nawiązujące do omawianego problemu stabilności. Pokażemy, że wspomniana implikacja (5.11) jest prawdziwa dla niektórych przestrzeni.

Twierdzenie 5.17 *Jeżeli* X_1, X_2, Y *są dowolnymi, rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi, to wówczas prawdziwe są następujące równoważności:*
(a) $(X_1 \oplus_\infty X_2, Y) \in (SLI) \Leftrightarrow (X_1 \oplus_\infty X_2, Y) \in (SOBP)$;
(b) $(X_1 \oplus_1 X_2, Y) \in (SLI) \Leftrightarrow (X_1 \oplus_1 X_2, Y) \in (SOBP)$.

Dowód: Obie równoważności wykazuje się w ten sam sposób, więc udowodnimy tylko (a). Implikacja "$\Leftarrow$" wynika z twierdzenia 5.9, zatem pozostaje tylko uzasadnić "$\Rightarrow$". Załóżmy, że $(X_1 \oplus_\infty X_2, Y) \in (SLI)$ i niech $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to [0, +\infty)$ będzie funkcją, o której jest mowa w definicji stabilności, stosowną do pary przestrzeni $(X_1 \oplus_\infty X_2, Y)$. Ustalmy operator $f\colon X_1 \oplus_\infty X_2 \to Y$, który ε-zachowuje B-ortogonalność, gdzie $\varepsilon < 1 - \sqrt[3]{1-\varepsilon_o}$. Zatem f musi spełniać warunek (c) z twierdzenia 5.15 z funkcją $\eta(\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon)^3 < \varepsilon_o$. Stąd

$$(1-\eta(\varepsilon))\|x\|_\infty \leqslant \left\|\tfrac{f}{\|f\|}x\right\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant (1+\eta(\varepsilon))\|x\|_\infty$$

dla wszystkich $x \in X_1 \oplus_\infty X_2$, więc operator $\frac{f}{\|f\|}$ jest $\eta(\varepsilon)$-izometrią. Wówczas istnieje liniowa izometria $h\colon X_1 \oplus_\infty X_2 \to Y$ realizująca nierówność $\left\|\frac{f}{\|f\|} - h\right\| \leqslant \delta(\eta(\varepsilon))$, a stąd

$$\| f - \|f\|h \| \leqslant \widehat{\delta}(\varepsilon)\, \|f\|,$$

gdzie $\widehat{\delta}(\varepsilon) := \delta(\eta(\varepsilon))$. Oczywiście $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \widehat{\delta}(\varepsilon) = 0$ oraz $\|f\|h$ zachowuje B-ortogonalność. ∎

Wniosek 5.18 $(c,c), (c_o, c_o), (l^\infty, l^\infty) \in (SOBP)$.

Dowód: Każda z przestrzeni c, c_o, l^∞ jest sumą prostą[5], więc wniosek otrzymujemy bezpośrednio z powyższego twierdzenia oraz z (4.12). ∎

5.2 Operatory określone na przestrzeni $C[0,1]$

W poprzednim podrozdziale zakładaliśmy w twierdzeniach, że dziedzina operatorów jest sumą prostą (lub przynajmniej jest z nią izometrycznie izomorficzna). Tamte wyniki będą pomocne w uzyskaniu dalszych rezultatów w bieżącym podrozdziale. Oznaczmy przez $C[0,1]$ przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,1]$, z normą supremum.

Lemat 5.19 *Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi oraz W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni X takimi, że $W_1 + W_2 = X$. Załóżmy ponadto, że*

$$\exists_{\vartheta>0} \forall_{x\in X} \exists_{w_1\in W_1} \exists_{w_2\in W_2} \,:\, w_1 + w_2 = x \;\wedge\; \|w_1\| \leqslant \vartheta\|x\| \;\wedge\; \|w_2\| \leqslant \vartheta\|x\|. \tag{5.20}$$

Jeżeli odwzorowanie liniowe $f\colon X \to Y$ ma ciągłe zacieśnienia $f|_{W_1}\colon W_1 \to Y$ oraz $f|_{W_2}\colon W_2 \to Y$, to wówczas f również jest ciągłe.

Dowód: Ustalmy $x \in S(X)$. Z warunku (5.20) dostajemy wektory $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ takie, że $x = w_1 + w_2$ oraz $\|w_1\|, \|w_2\| \leqslant \vartheta$. Stąd

$$\begin{aligned}\|fx\| &= \|fw_1 + fw_2\| \leqslant \|fw_1\| + \|fw_2\| \leqslant \| f|_{W_1} \|\cdot\|w_1\| + \| f|_{W_2} \|\cdot\|w_2\| \leqslant \\ &\leqslant (\| f|_{W_1} \| + \| f|_{W_2} \|)\,\vartheta,\end{aligned}$$

a więc f jest ciągłe, gdyż jest ograniczone na sferze. ∎

Twierdzenie 5.20 *Niech Y będzie dowolną rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Załóżmy, że $f\colon C[0,1] \to Y$ jest liniowe i ε-zachowuje B-ortogonalność. Wtedy operator f spełnia każdy z poniższych warunków:*

(a) $\forall_{x,y\in S(C[0,1])} : (1-\eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|$, *gdzie* $\eta(\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^3$,

(b) $(1-\eta(\varepsilon))\|f\| \leqslant [f]$,

(c) $\forall_{x\in C[0,1]} : (1-\eta(\varepsilon))\|f\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant \|fx\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_\infty$, *tzn. f jest $\eta(\varepsilon)$-prawie podobieństwem.*

Dowód: Dla ustalonej liczby $\alpha \in (0,1)$ rozważmy przestrzeń $\mathbb{R} \oplus_\infty C[\alpha, 1]$ oraz zdefiniujemy podprzestrzeń C_α przestrzeni $C[0,1]$ przez

[5] Ten fakt wynika z uwagi 5.14.

$$C_\alpha := \{x \in C[0,1] \ : \ x \text{ jest afiniczna na przedziale}^6 \ [0,\alpha]\}.$$

Przestrzenie $\mathbb{R} \oplus_\infty C[\alpha, 1]$ oraz C_α są izometrycznie izomorficzne. Aby to uzasadnić, definiujemy izometrię $U\colon C_\alpha \to \mathbb{R} \oplus_\infty C[\alpha, 1]$ zadaną przez

$$Ux := \big(x(0),\, x|_{[\alpha,1]}\big)$$

dla wszystkich $x \in C_\alpha$. Łatwo można sprawdzić, że odwzorowanie U jest liniowe. Wykażemy tylko, że U jest surjektywną izometrią. Ustalmy $x \in C_\alpha$. Uzasadnimy najpierw równość $\|Ux\|_\infty = \|x\|_\infty$ (gdzie symbol $\|\cdot\|_\infty$ oznacza po lewej stronie normę produktową w przestrzeni $\mathbb{R} \oplus_\infty C[\alpha, 1]$, natomiast po prawej stronie normę supremum w podprzestrzeni C_α przestrzeni $C[0,1]$). Skoro funkcja $x(\cdot)$ jest afiniczna na przedziale $[0,\alpha]$, to nie jest trudne do pokazania, że kres górny funkcji $|x(\cdot)|$ musi być realizowany w pewnym punkcie (niekoniecznie jednym) zbioru $\{0\} \cup [\alpha, 1]$. Stąd dostajemy następujące równości

$$\begin{aligned}\|Ux\|_\infty &= \big\|\big(x(0),\, x|_{[\alpha,1]}\big)\big\|_\infty = \max\{\,|x(0)|, \max\{|x(t)| : t \in [\alpha,1]\}\,\} = \\ &= \max\{\,|x(t)| : t \in \{0\} \cup [\alpha,1]\,\} = \max\{\,|x(t)| : t \in [0,1]\,\} = \|x\|_\infty .\end{aligned}$$

Pozostaje do udowodnienia surjektywność. Niech $(c, y) \in \mathbb{R} \oplus_\infty C[\alpha, 1]$. Zdefiniujmy funkcję $z\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ następująco

$$z(t) := \begin{cases} y(t) & \text{gdy } t \in (\alpha, 1]; \\ \frac{y(\alpha)-c}{\alpha} t + c & \text{gdy } t \in [0,\alpha]. \end{cases}$$

Stąd $z \in C_\alpha$ oraz $Uz = (c, y)$, zatem U jest także surjekcją. Teraz jest już widoczne, że przestrzeń C_α można przedstawić w postaci sumy prostej.

Niech $f\colon C[0,1] \to Y$ będzie niezerowym, liniowym odwzorowaniem ε-zachowującym B-ortogonalność. Najpierw wykażemy, że podzbiór

$$E := \bigcup_{\alpha\in(0,1)} C_\alpha$$

jest gęstą podprzestrzenią liniową. Dla wszystkich liczb $\alpha, \beta \in (0,1)$ jest spełniony warunek: $\alpha < \beta \ \Rightarrow \ C_\alpha \supset C_\beta$. Stąd łatwo można sprawdzić, że E jest podprzestrzenią. Aby wykazać gęstość ustalmy $x \in C[0,1]$ oraz $\gamma > 0$. Funkcja $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc istnieje $\delta \in (0,1)$, że dla każdego $t \in [0,\delta]$ jest nierówność $|x(t) - x(0)| < \frac{\gamma}{4}$. Następnie definiujemy funkcję $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$y(t) := \begin{cases} x(t) & \text{gdy } t \in (\delta, 1]; \\ \frac{x(\delta)-x(0)}{\delta} t + x(0) & \text{gdy } t \in [0,\delta]. \end{cases}$$

Z powyższego wzoru widać, że $y \in C_\delta$. Jeśli $t \in [0,\delta]$, to

$$|y(t) - x(t)| = \left|\tfrac{x(\delta)-x(0)}{\delta} t + x(0) - x(t)\right| \leqslant |x(\delta) - x(0)| \cdot \tfrac{t}{\delta} + |x(0) - x(t)| < \tfrac{\gamma}{4} \cdot 1 + \tfrac{\gamma}{4}.$$

[6]Funkcję $x \in C[0,1]$ nazywamy *afiniczną na* $[0,\alpha]$, gdy istnieją $b, c \in \mathbb{R}$ takie, że $x(t) = bt + c$ dla $t \in [0,\alpha]$.

Ponadto, dla $t \in (\delta, 1]$ jest $|y(t) - x(t)| = 0$. Zatem skoro dla każdego $t \in [0,1]$ jest $|y(t) - x(t)| < \frac{\gamma}{2}$, to $\|y - x\|_\infty < \gamma$. W ten sposób wykazaliśmy gęstość podprzestrzeni E w $C[0,1]$.

Ustalmy teraz $\alpha \in (0,1)$. Odwzorowanie f ε-zachowuje B-ortogonalność również na podprzestrzeni C_α. Stąd operator $f\colon C_\alpha \to Y$ spełnia założenia twierdzenia 5.15 (bo przestrzeń C_α jest izometrycznie izomorficzna z pewną sumą prostą), zatem dla wszystkich $x, y \in S(C_\alpha)$ zachodzi nierówność $(1 - \eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|$, gdzie funkcja η jest taka jak w twierdzeniu 5.15. Liczba α była wybrana dowolnie, stąd w łatwy sposób wynika warunek

$$\forall_{x,y \in S(E)}: \ (1 - \eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|. \tag{5.21}$$

Aby wykazać, że nierówność z (5.21) jest prawdziwa dla wektorów ze sfery $S(C[0,1])$, wystarczy uzasadnić ciągłość operatora f, gdyż $S(E)$ jest zbiorem gęstym[7] w $S(C[0,1])$.

Ustalmy liczby $t_1, t_2 \in (0,1)$ takie, że $t_1 < t_2$ i zdefiniujmy podprzestrzeń

$$A_{t_2} := \{x \in C[0,1] \ : \ x \text{ jest afiniczna na przedziale } [t_2, 1]\}.$$

Rozumowanie podobne do przeprowadzonego wyżej pozwala stwierdzić, że przestrzenie A_{t_2} oraz $C[0,t_2] \oplus_\infty \mathbb{R}$ są izometrycznie izomofriczne jak również, że

$$\forall_{x,y \in S(A_{t_2})}: \ (1 - \eta(\varepsilon))\|fx\| \leqslant \|fy\|. \tag{5.22}$$

Stosując jednocześnie warunki (5.21), (5.22) oraz lemat 1.5 otrzymujemy ciągłość odwzorowań $f|_{C_{t_1}}$ oraz $f|_{A_{t_2}}$.

Wykażemy teraz, że podprzestrzenie C_{t_1}, A_{t_2} spełniają równość $C_{t_1} + A_{t_2} = C[0,1]$ oraz warunek (5.20). Ustalmy $x \in C[0,1]$ i zdefiniujmy dwie funkcje $u, w\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \in [0, t_1); \\ \frac{x(t_2)}{t_2 - t_1}(t - t_1) & \text{gdy } t \in [t_1, t_2]; \\ x(t) & \text{gdy } t \in (t_2, 1]; \end{cases} \qquad w(t) := \begin{cases} x(t) & \text{gdy } t \in [0, t_1); \\ x(t) - u(t) & \text{gdy } t \in [t_1, t_2]; \\ 0 & \text{gdy } t \in (t_2, 1]. \end{cases}$$

Zauważmy, że $u \in C_{t_1}$, $w \in A_{t_2}$ oraz $u + w = x$, a zatem uzasadniliśmy $C_{t_1} + A_{t_2} \supset C[0,1]$. Inkluzja przeciwna również zachodzi.

Jeśli $t \in [0, t_1) \cup (t_2, 1]$, to oczywiście $|u(t)| \leqslant \|x\|$. Niech teraz $t \in [t_1, t_2]$. Wówczas

$$|u(t)| = \left|\frac{x(t_2)}{t_2 - t_1}(t - t_1)\right| = |x(t_2)|\frac{|t - t_1|}{|t_2 - t_1|} \leqslant |x(t_2)| \leqslant \|x\|,$$

zatem $\|u\| \leqslant \|x\|$. Podobnie, jeśli $t \in [0, t_1) \cup (t_2, 1]$, to wtedy $|w(t)| \leqslant \|x\|$, natomiast gdy $t \in [t_1, t_2]$, to

$$|w(t)| = |x(t) - u(t)| \leqslant |x(t)| + |u(t)| \leqslant \|x\| + \|u\| \leqslant \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

Pokazaliśmy w ten sposób $\|u\| \leqslant 2\|x\|$ oraz $\|w\| \leqslant 2\|x\|$. Możemy teraz zastosować (z $\vartheta = 2$) lemat 5.19, na mocy którego dostajemy ciągłość operatora f. ∎

Na koniec tego rozdziału podajemy, jako wniosek z powyższego rezultatu, twierdzenie nawiązujące do zagadnienia stabilności.

[7] Z równości $\overline{E} = C[0,1]$ łatwo wynika równość $\overline{S(E)} = S(C[0,1])$.

Twierdzenie 5.21 *Jeżeli Y jest dowolną, rzeczywistą przestrzenią unormowaną, to wówczas prawdziwa jest następująca równoważność:*

$$(C[0,1],Y) \in (SLI) \Leftrightarrow (C[0,1],Y) \in (SOBP).$$

Dowód: Wykazanie powyższego faktu przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 5.17. ■

Oznaczmy, przez $C(M)$ przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych, określonych na zwartej przestrzeni metrycznej M. Ponadto, dla przestrzeni $C(M)$ rozważmy normę supremum $\|\cdot\|_\infty$.

Twierdzenie 5.22 [6, Theorem 2] *Niech K, S będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi i niech $\varepsilon \in (0,1)$. Załóżmy, że odwzorowanie liniowe $T\colon C(K) \to C(S)$ spełnia*

$$\forall_{x \in C(K)} : \ \|x\|_\infty \leqslant \|Tx\|_\infty \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

Wówczas istnieje liniowa izometria $W\colon C(K) \to C(S)$ taka, że $\|T-W\| \leqslant 3\varepsilon$.

Z powyższego twierdzenia można bardzo szybko uzasadnić, że $(C(K), C(S)) \in (SLI)$. Ostatni rezultat tego podrozdziału, który za chwilę udowodnimy, wraz z twierdzeniem 5.21, stanowi rozwiązanie zagadnienia stabilności operatorów zachowujących B-ortogonalność, określonych na przestrzeni $C[0,1]$.

Twierdzenie 5.23 *Niech S będzie przestrzenią metryczną zwartą oraz $\varepsilon \in \left(0, 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$. Załóżmy ponadto, że $f\colon C[0,1] \to C(S)$ jest liniowe oraz ε-zachowuje B-ortogonalność. Wówczas istnieje odwzorowanie liniowe $h\colon C[0,1] \to C(S)$ zachowujące B-ortogonalność, które spełnia nierówność $\|f-h\| \leqslant 3\left(1-(1-\varepsilon)^3\right)\|f\|$.*

Dowód: Z twierdzenia 5.20 wnosimy, że operator f spełnia warunek

$$\forall_{x \in C[0,1]} : \ (1-\eta(\varepsilon))\|f\|\cdot\|x\|_\infty \leqslant \|fx\|_\infty \leqslant \|f\|\cdot\|x\|_\infty,$$

gdzie $\eta(\varepsilon) = 1-(1-\varepsilon)^3$. Stąd $\forall_{x\in C[0,1]} : \ \|x\|_\infty \leqslant \left\|\frac{f}{(1-\eta(\varepsilon))\|f\|}x\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\eta(\varepsilon)}\cdot\|x\|_\infty$, a zatem

$$\forall_{x \in C[0,1]} : \ \|x\|_\infty \leqslant \left\|\frac{f}{(1-\eta(\varepsilon))\|f\|}x\right\|_\infty \leqslant \left(1 + \frac{\eta(\varepsilon)}{1-\eta(\varepsilon)}\right)\cdot\|x\|_\infty .$$

Rozważając teraz twierdzenie 5.22 w kontekście operatora $\frac{f}{(1-\eta(\varepsilon))\|f\|}$, możemy otrzymać linową izometrię $g\colon C[0,1] \to C(S)$ która spełnia nierówność $\left\|\frac{f}{(1-\eta(\varepsilon))\|f\|} - g\right\| \leqslant 3\frac{\eta(\varepsilon)}{1-\eta(\varepsilon)}$. Łatwo widać, że operator $h\colon C[0,1] \to C(S)$, określony wzorem $h := (1-\eta(\varepsilon))\,\|f\|g$, zachowuje B-ortogonalność oraz realizuje nierówność $\|f-h\| \leqslant 3\eta(\varepsilon)\|f\|$. ■

5.3 Przykład braku stabilności

Pokażemy w ostatnim podrozdziale przykład takiej pary przestrzeni, która nie ma efektu stabilności operatorów zachowujących B-ortogonalność, ani nie zachodzi stabilność liniowych izometrii. W pracy [42] jest podany przykład nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej, oznaczanej tam przez H_α, takiej, że $(H_\alpha, H_\alpha) \notin (SLI)$. W [16] wykazano, że $(H_\alpha, H_\alpha) \notin (SOJP)$. Bezpośrednio z twierdzenia 5.9 dostajemy $(H_\alpha, H_\alpha) \notin (SOBP)$.

Jeśli $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$, to wtedy $(X, Y) \in (SOBP)$ (zob. [38, Proposition 4.4]), $(X, Y) \in (SLI)$ (zob. twierdzenie 5.9) oraz $(X, Y) \in (SOJP)$ (zob. twierdzenie 5.7).

Można teraz zadać naturalne pytanie: czy w sytuacji[8] gdy $\dim X < \infty$ ale $\dim Y = \infty$, dla pary przestrzeni (X, Y) jest stabilność operatorów zachowujących B-ortogonalność lub J-ortogonalność lub stabilność liniowych izometrii? Okazuje się, że nie musi tak być, co pokażemy w dalszej części podrozdziału.

Niech H oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Do końca rozdziału przez $\|\cdot\|_1$ będziemy oznaczać normę pochodzącą od tego iloczynu. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \in \{2, 3, \ldots\}$ w kulę (w koło) $\overline{K}((0,0); 1)$ możemy wpisać 2^n-kąt foremny, który będziemy dalej oznaczać P_n. Wielokąt P_n jest zbiorem wypukłym, pochłaniającym, zbalansowanym i ograniczonym[9], dlatego funkcjonał Minkowskiego określony przez ten zbiór jest normą, którą będziemy dalej oznaczać jako $\|\cdot\|_n$. Stosując znane wzory na promienie kół, opisanego na wielokącie i wpisanego w wielokąt, można wyprowadzić zależność $\beta_n \overline{K}((0,0); 1) \subset P_n \subset \overline{K}((0,0); 1)$, gdzie $\beta_n = \cos \frac{\pi}{2^n}$. Stąd w szczególności

$$\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_n \leqslant \frac{1}{\beta_n} \|\cdot\|_1 \tag{5.23}$$

oraz $\frac{1}{\beta_n} \searrow 1$ gdy $n \to +\infty$. Niech teraz X_n oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z normą $\|\cdot\|_n$.

Następnie zdefiniujmy przestrzeń

$$\mathcal{P} := \left\{ y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots) \ : \ y_k \in \mathbb{R}^2;\ k = 1, 2, 3, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

z normą zadaną wzorem

$$\|y\|_{\mathcal{P}} := \max\{\|y_1\|_1, \|y_2\|_2, \|y_3\|_3, \ldots, \|y_n\|_n\} \quad \text{dla} \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{P}.$$

Oczywiście $\dim H = 2$, $\dim \mathcal{P} = \infty$. Dalej definiujemy dla każdego $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ operatory

$$f_k \colon H \to \mathcal{P}, \quad f_k(x) := (0, \ldots, 0, \overset{(k)}{x}, 0, 0, \ldots), \tag{5.24}$$

gdzie x pojawia się tylko na k-tym miejscu. Przystąpimy obecnie do pokazania, że każdy operator f_k jest ε_k-izometrią, z $\varepsilon_k := \frac{1}{\beta_k} - 1$. Zauważmy, że $\|f_k(x)\|_{\mathcal{P}} = \|x\|_k$ dla wszystkich $k \geqslant 2$. Z nierówności (5.23) dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$(1 - \varepsilon_k)\|x\|_1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\|_k \leqslant (1 + \varepsilon_k)\|x\|_1,$$

a skoro $\|f_k(x)\|_{\mathcal{P}} = \|x\|_k$, to

$$(1 - \varepsilon_k)\|x\|_1 \leqslant \|f_k(x)\|_{\mathcal{P}} \leqslant (1 + \varepsilon_k)\|x\|_1.$$

więc istotnie f_k jest ε_k-izometrią.

Poniższy lemat pokazuje pewną charakteryzację liniowych izometrii odwzorowujących przestrzeń H w przestrzeń $\mathcal{P}$. Na pewno takie izometrie istnieją, np.: $U(x) = (x, 0, 0, \ldots)$. Zauważmy, że jeśli $h \colon H \to \mathcal{P}$ jest liniowe, to dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ mamy

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x), \ldots, h_p(x), 0, 0, \ldots),$$

[8] Wszystkie operatory, o których jest mowa w tym podrozdziale są albo injektywne, albo zerowe. Dlatego trywialnej sytuacji gdy $\dim X = \infty$ oraz $\dim Y < \infty$ nie będziemy rozważać.

[9] Ograniczoność zbioru jest konieczna, aby funkcjonał Minkowskiego spełniał implikację $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (por. warunek 5 w [15, Twierdzenie 1.20]).

gdzie każde odwzorowanie $h_1\colon H \to H$, $h_m\colon H \to X_m$ (dla $m = 2, 3, \ldots, p$) jest liniowe. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę, że liczba p jest uniwersalna dla danego operatora, tzn. operator h ma skończenie wiele nieznikających składowych. Aby to uzasadnić, niech $a, b \in H$ będzie dowolną bazą w H. Skoro $h(a), h(b) \in \mathcal{P}$, to $h(a) = (y_1, \ldots, y_l, 0, 0, \ldots)$ oraz $h(b) = (z_1, \ldots, z_s, 0, 0, \ldots)$ dla pewnych $(y_1, \ldots, y_l, 0, 0, \ldots)$, $(z_1, \ldots, z_s, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{P}$. Wówczas dla dowolnego wektora $x = \alpha a + \beta b \in X$ możemy wyliczyć

$$h(x) = \alpha h(a) + \beta h(b) = \alpha(y_1, \ldots, y_l, 0, 0, \ldots) + \beta(z_1, \ldots, z_s, 0, 0, \ldots),$$

co oznacza, że wektor $h(x)$ ma co najwyżej $\widetilde{m}$ niezerowych składowych, gdzie $\widetilde{m} = \max\{l, s\}$ nie zależy od x.

Lemat 5.24 *Jeżeli $h\colon H \to \mathcal{P}$ jest liniową izometrią i $h = (h_1, h_2, h_3, \ldots, h_p, 0, 0, \ldots)$, to $\|h_1\| = 1$ lub istnieją wskaźniki $l, m \in \{2, 3, \ldots, p\}$ takie, że $l \neq m$ oraz $\|h_l\| = \|h_m\| = 1$.*

Dowód: Niech $h\colon H \to \mathcal{P}$ będzie dowolną liniową izometrią. Jeśli $\|h_1\| = 1$, to teza zachodzi. Załóżmy teraz, że $\|h_1\| < 1$ oraz załóżmy nie wprost, że istnieje[10] dokładnie jeden wskaźnik $k \in \{2, 3, \ldots, p\}$ taki, że $\|h_k\| = 1$. Wtedy istnieje liczba $c \in (0, 1)$ taka, że dla każdego $l \in \{2, 3, \ldots, p\} \setminus \{k\}$ i dla każdego $x \in S(H)$ prawdziwe są nierówności[11]

$$\|h_1(x)\|_1 \leqslant \|h_1\| \leqslant c < 1 \quad \text{oraz} \quad \|h_l(x)\|_l \leqslant \|h_l\| \leqslant c < 1.$$

Wówczas dla $x \in S(H)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 = \|h(x)\|_{\mathcal{P}} &= \max\{\|h_1(x)\|_1, \|h_2(x)\|_2, \|h_3(x)\|_3, \ldots, \|h_p(x)\|_p\} = \\ &= \max\{\max\{\|h_l(x)\|_l : l \in \{2, 3, \ldots, p\} \setminus \{k\}\}, \|h_1(x)\|_1, \|h_k(x)\|_k\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{c, c, \|h_k(x)\|_k\} = \max\{c, \|h_k(x)\|_k\} \leqslant \max\{c, \|h_k\|\} = \max\{c, 1\} = 1. \end{aligned}$$

Skoro „na początku" i „na końcu" pojawiło się jeden, to wszędzie muszą być równości. Stąd $\max\{c, \|h_k(x)\|_k\} = 1$, zatem $\|h_k(x)\|_k = 1$ (bo $c < 1$) dla każdego $x \in S(H)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że $h_k\colon H \to X_k$ jest izometrią liniową. Skoro $\dim H = \dim X_k = 2$, to h_k jest też surjekcją. Stąd przestrzenie H, X_k są izometrycznie izomorficzne. Przestrzeń H jest ściśle wypukła, a więc przestrzeń X_k także. Z drugiej strony X_k nie może być ściśle wypukła ponieważ sfera jednostkowa w X_k zawiera odcinki (gdyż kula była 2^k-kątem foremnym), a więc sprzeczność. ∎

Twierdzenie 5.25 $(H, \mathcal{P}) \notin (SOBP)$, $(H, \mathcal{P}) \notin (SOJP)$ *oraz* $(H, \mathcal{P}) \notin (SLI)$.

Dowód: Z uwagi na twierdzenia 5.7, 5.9, wystarczy, że pokażemy tylko $(H, \mathcal{P}) \notin (SLI)$. Załóżmy nie wprost, że $(H, \mathcal{P}) \in (SLI)$. Wówczas istnieje funkcja $\delta\colon [0, \varepsilon_o) \to \mathbb{R}$ spełniająca równość $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \delta(\varepsilon) = 0$ i taka, że dla każdej liniowej ε-izometrii (gdzie oczywiście $\varepsilon < \varepsilon_o$) $f\colon H \to \mathcal{P}$ istnieje liniowa izometria $g\colon H \to \mathcal{P}$ realizująca nierówność $\|f - g\| \leqslant \delta(\varepsilon)$. W szczególności dla każdej[12] liniowej ε_k-izometrii f_k, zdefiniowanej wzorem (5.24), istnieje pewna izometria liniowa g_k taka, że

$$\|f_k - g_k\| \leqslant \delta(\varepsilon_k), \tag{5.25}$$

[10] Na pewno istnieje przynajmniej jeden, gdyż $\|h\| = 1$.

[11] Skoro $\|h_1\|, \|h_l\| < 1$, to wystarczy $c := \max\{\|h_1\|, \|h_l\| : l \in \{2, 3, \ldots, p\} \setminus \{k\}\}$.

[12] Skoro $\varepsilon_k \searrow 0$, to istnieje $k_o \in \mathbb{N}$ takie, że $\varepsilon_k \in [0, \varepsilon_o)$ dla wszystkich $k > k_o$. Dlatego „od pewnego momentu" wszystkie liczby ε_k należą do dziedziny funkcji δ, czyli wartość $\delta(\varepsilon_k)$ w nierówności (5.25) będzie miała sens. Zatem pisząc tutaj „dla każdej liniowej ε_k-izometrii f_k", mamy na myśli wszystkie te ε_k-izometrie, dla których $\varepsilon_k < \varepsilon_o$.

Ustalmy teraz $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Niech $g=(h_1,h_2,\ldots,h_p,0,0,\ldots)\colon H \to \mathcal{P}$ będzie dowolną liniową izometrią. Z lematu 5.24 (oraz ze zwartości $S(H)$) wiemy, że istnieje $x_1 \in S(H)$ spełniające równość $\|h_1(x_1)\|_1 = \|h_1\| = 1$ lub istnieją $l,m \in \{2,3,\ldots,p\}$ takie, że $l \neq m$ oraz istnieją $x_l, x_m \in S(H)$ realizujące równości $\|h_l(x_l)\|_l = \|h_l\| = 1$, $\|h_m(x_m)\|_m = \|h_m\| = 1$. Jeżeli zachodzi równość $\|h_1(x_1)\|_1 = \|h_1\| = 1$, to wtedy

$$\begin{aligned}
\|f_k - g\| &\geqslant \|f_k(x_1) - g(x_1)\|_{\mathcal{P}} = \\
&= \Big\|(0,\ldots,0,\overset{(k)}{x_1},0,0,\ldots) - (h_1(x_1),h_2(x_1),\ldots,h_p(x_1),0,0,\ldots)\Big\|_{\mathcal{P}} \overset{(k\neq 1)}{\geqslant} \\
&\geqslant \|h_1(x_1)\|_1 = 1.
\end{aligned}$$

Natomiast jeśli zachodzą równości $\|h_l(x_l)\|_l = \|h_l\| = 1$, $\|h_m(x_m)\|_m = \|h_m\| = 1$, gdzie $l \neq m$ oraz $x_l, x_m \in S(H)$, to wówczas przynajmniej jeden z indeksów l,m jest różny od k. Oznaczmy go przez t. Dalej analogicznie uzasadniamy, że

$$\begin{aligned}
\|f_k - g\| &\geqslant \|f_k(x_t) - g(x_t)\|_{\mathcal{P}} = \\
&= \Big\|(0,\ldots,0,\overset{(k)}{x_t},0,0,\ldots) - (\overset{(1)}{h_1(x_t)},\overset{(2)}{h_2(x_t)},\ldots,\overset{(t)}{h_t(x_t)},\ldots,\overset{(p)}{h_p(x_t)},0,0,\ldots)\Big\|_{\mathcal{P}} \overset{(k\neq t)}{\geqslant} \\
&\geqslant \|h_t(x_t)\|_t = 1.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że dla każdej liniowej izometrii $g\colon H \to \mathcal{P}$ zachodzi nierówność $\|f_k - g\| \geqslant 1$. Stąd i z nierówności (5.25) dostajemy $1 \leqslant \|f_k - g_k\| \leqslant \delta(\varepsilon_k)$. Jeśli teraz $k \to +\infty$, to $\varepsilon_k \searrow 0$, a zatem $\delta(\varepsilon_k) \searrow 0$. Stąd $1 \leqslant 0$, więc otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Bibliografia

[1] J. Alonso, C. Benitez: *Orthogonality in normed linear spaces: A survey. Part I: Main properties*, Extracta Math. **3**, 1–15 (1988). *Part II: Relations between main orthogonalities*, Extracta Math. **4**, 121–131 (1989).

[2] J. Alonso, H. Martini, Senlin Wu.: *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequationes Math. **83** (2012), 153–189.

[3] C. Alsina, J. Sikorska, M. Santos Tomás, *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2009.

[4] D. Amir, *Characterization of Inner Product Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1986.

[5] S.F. Bellenot, *Banach spaces with trivial isometries*, Israel J. Math. **56** (1986), 89–96.

[6] Y. Benyamini, *Small into-isomorphisms between spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 479-485.

[7] Y. Benyamini, *Small into-isomorphisms between spaces of continuous functions II*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 825-833.

[8] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169–172.

[9] A. Blanco, A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), 709–716.

[10] J. Chmieliński, *On an ε-Birkhoff orthogonality*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **6**(3) (2005), Art. 79.

[11] J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 158–169.

[12] J. Chmieliński, *Stability of the orthogonality preserving property in finite-dimensional inner product spaces*, J. Math. Anal. Appl. **318** (2006), 433–443.

[13] J. Chmieliński, *On some approximate functional relations stemming from orthogonality preserving property*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. Volume 7, Issue 3, Article 85, 2006.

[14] J. Chmieliński, *Remarks on orthogonality preserving mappings in normed spaces and some stability problems*, Banach J. Math. Anal. **1** (2007), no. 1, 117–124.

[15] J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna, Notatki do wykładu*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2004.

[16] J. Chmieliński, P. Wójcik, *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Analysis **72** (2010), 1445-1453.

[17] J. Chmieliński, P. Wójcik, *On a ρ-orthogonality*, Aequationes Math. **80** (2010), 45-55.

[18] J. Chmieliński, *Orthogonality preserving property and its Ulam stability*, J. Brzdęk, Th. M. Rassias (eds), Functional Equations in Mathematical Analysis. Springer Optimization and Its Applications **52**, 2012, 33-58.

[19] J. Chmieliński, P. Wójcik, *ρ-orthogonality and its preservation – revisited*, Recent Developments in Functional Equation and Inequalities, Banach Center Publications, Volume **99**, Institute of Mathematic, Polish Academy of Sciences, Warszawa 2013, 17-30.

[20] G.G. Ding, *The approximation problem of almost isometric operators by isometric operators*, Acta Math. Sci. (English Ed.) **8** (1988), 361–372.

[21] S.S. Dragomir, *On approximation of continuous linear functionals in normed linear spaces*, An. Univ. Timişoara Ser. Ştiinţ. Mat. **29** (1991), 51–58.

[22] S.S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2004.

[23] J.R. Giles, *Classes of semi–inner–product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436–446.

[24] D.H. Hyers, S.M. Ulam, *On approximate isometries*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 288–292

[25] R.C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945), 291–301.

[26] R.C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.

[27] K. Jarosz, *Small isomorphisms of $C(X, E)$ spaces*, Pacific J. Math. **138** (1989), 295–315.

[28] A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **123** (1993), 835-837.

[29] W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, wydanie piąte, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.

[30] Liang Kong, Huai-xin Cao, *Stability of orthogonality preserving mapping and the orthogonality equation*, Journal of Shaanxi Normal University (Normal Science Edition), Vol. **36**, No. 5, Sep. 2008, 10-14.

[31] A.I. Kostrikin, *Wstęp do algebry - Algebra liniowa, cz. 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

[32] A.V. Kuz'minykh, *Maps which almost preserve angles*, Sib. Math. J. **29** (1988), 593-598; tłumaczenie z: Sib. Math. Zh. **29** (1988), 99-105.

[33] G. Lumer, *Semi–inner–product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29–43.

[34] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 4(1933), 70-84.

[35] E. Michael, A. Pełczyński, *Separable spaces which admit approximation*, Israel J. Math. **4** (1966), 189-198.

[36] P.M. Miličić, *Sur la G-orthogonalité dans les espaces normés*, Mat. Vesnik **39** (1987), 325–334.

[37] W. Mlak, *Wstęp do przestrzeni Hilberta*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1970.

[38] B. Mojškerc, A. Turnšek, *Mappings approximately preserving orthogonality in normed spaces*, Nonlinear Analysis **73** (2010), 3821-3831.

[39] M. Omladič, P. Šemrl, *On non linear perturbations of isometries*, Math. Ann. **303** (1995), 617–628.

[40] G.K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer- Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1989.

[41] R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[42] V.Yu. Protasov, *On stability of isometries in Banach spaces*, J. Brzdęk, Th. M. Rassias (eds), Functional Equations in Mathematical Analysis. Springer Optimization and Its Applications **52**, 2012, 273-285.

[43] J. Rätz, *On orthogonally additive mappings*, Aequationes Math. **28** (1985), 35–49.

[44] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.

[45] Gy. Szabó, *On orthogonality spaces admitting nontrivial even orthogonally additive mappings*, Acta Math. Hungar. **56** (1990), 177-187.

[46] Gy. Szabó, *Continuous orthogonality spaces*, Publ. Math. Debrecen **38** (1991), 311-322.

[47] A. Turnšek, *On mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 625–631.

[48] P. Wójcik, *Linear mappings preserving ρ-orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 171–176.